

# Az $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$ tércsoportjainak az osztályozása

Farkas József Zoltán  
Budapesti Műszaki Egyetem Természettudományi Kar  
III. évf. alkalmazott matematikus

Témavezető: Dr. Molnár Emil egyetemi tanár  
TDK dolgozat  
1999. November

## Kivonat

A századvégi matematika egyik fontos felismerése, hogy hasonlóan a két dimenziós sokaságokhoz a három dimenziós sokaságok topológiai tulajdonságainak a vizsgálatában is fontos segítséget nyújt a geometria. Ennek a felismerésnek az eredményeként került meghatározásra a három dimenziós Riemann tér nyolc homogén maximális geometriája, mely elsősorban W.P. Thurston [7] nevéhez fűződik. Ezen terek közé tartozik az  $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$  szorzattér. Dolgozatunk célja a tér izometriáinak az ismeretében a kompakt alaptartományú diszkrét transzformációcsoportok, ún. tércsoportok meghatározása és osztályozása.

# 1. Bevezetés

Talán ma már mindenki jól ismeri az euklideszi sík 17 díszítéscsoportját[1][2] (1.ábra), amelyek a kompakt alaptartományú tércsoportok osztályozásának megoldásai  $\mathbf{E}^2$ -ben, vagy a véges mozgáscsoportokat, az  $\mathbf{S}^2$  gömb analóg csoportjait. Röviden elevenítsük is fel őket. A ciklikus és a diéder csoportok sorozatai, valamint a szabályos testek forgáscsoportjai 2-es indexű normális részcsoporthal lesznek a  $C_q \times I$ ,  $D_q \times I$ ,  $A_4 \times I$ ,  $S_4 \times I$ ,  $A_5 \times I$ , „teljes” tükrözéscsoportoknak, és szóba jönnek még a  $C_{2q}C_q$ ,  $D_qC_q$ ,  $D_{2q}D_q$ ,  $S_4A_4$  ún. vegyes csoportok. Itt  $I$  jelöli a gömb középpontjára való tükrözést. (Részletesebben lásd [1], és a későbbi példákat.) A következő táblázatban bevezetjük a gömbi csoportokat jelölő geometriailag szemléletesebb képet adó Macbeath féle szignatúrát, és összevetjük a fenti H. Weyl-től származó jelöléssel(2.ábra):

	Macbeath szignatúra	H. Weyl	Schönflies	Coxeter-Moser
1	$(+, 0; [q, q]; \{\})$	$C_q$	$C_q$	$[q]^+$
2	$(+, 0; [ ]; \{(q, q)\})$	$D_qC_q$	$C_{qv}$	$[q]$
3	$(+, 0; [2, 2, q]; \{\})$	$D_q$	$D_q$	$[2, q]^+$
4qo	$(+, 0; [ ]; \{(2, 2, q)\})$ $q$ páratlan	$D_{2q}D_q$	$D_{qh}$	$[2, q]$
4qe	$(+, 0; [ ]; \{(2, 2, q)\})$ $q$ páros	$D_q \times I$	$D_{qh}$	$[2, q]$
5qo	$(+, 0; [q]; \{(1)\})$ $q$ páratlan	$C_{2q}C_q$	$C_{qh}$	$[2, q^+]$
5qe	$(+, 0; [q]; \{(1)\})$ $q$ páros	$C_q \times I$	$C_{qh}$	$[2, q^+]$
6qo	$(+, 0; [2]; \{(q)\})$ $q$ páratlan	$D_q \times I$	$D_{qd}$	$[2^+, 2q]$
6qe	$(+, 0; [2]; \{(q)\})$ $q$ páros	$D_{2q}D_q$	$D_{qd}$	$[2^+, 2q]$
7qo	$(-, 1; [q]; \{\})$ $q$ páratlan	$C_{2q}C_q$	$S_{2q}$	$[2^+, 2q^+]$
7qe	$(-, 1; [q]; \{\})$ $q$ páros	$C_q \times I$	$S_{2q}$	$[2^+, 2q^+]$
8	$(+, 0; [2, 3, 3]; \{\})$	$A_4$	$T$	$[3, 3]^+$
9	$(+, 0; [2, 3, 4]; \{\})$	$S_4$	$O$	$[3, 4]^+$
10	$(+, 0; [2, 3, 5]; \{\})$	$A_5$	$I$	$[3, 5]^+$
11	$(+, 0; [ ]; \{2, 3, 3, \})$	$S_4A_4$	$T_d$	$[3, 3]$
12	$(+, 0; [ ]; \{2, 3, 4\})$	$S_4 \times I$	$O_h$	$[3, 4]$
13	$(+, 0; [ ]; \{2, 3, 5\})$	$A_5 \times I$	$I_h$	$[3, 5]$
14	$(+, 0; [3]; \{2\})$	$A_4 \times I$	$T_h$	$[3^+, 4]$

A Macbeath-féle szignatúra a  $G$ -pályák által alkotott  $\mathbf{S}^2/G$  két-dimenziós felületre utal:  $\pm g$  az irányíthatóságra és a nemszámra utalnak,  $[ ]$ -ben a forgáscentrumok rendjei. A tükrötengelyekből alkotott peremkomponensek  $\{(\dots)\}$ -ban lépnek fel,  $(\dots)$ -ben a tükrötengelyek szögére utaló sarkok rendjével[4]. A tércsoportok 2 dimenziós elmélete H.Poincaré(1890) kezdeményezésére A.M. Macbeath [4] 1967-es nem euklideszi síkcsoportok osztályozásáról írt munkájával zárult le.

A fogalmak illusztrálása végett vázlatosan tekintsük át a p2 jelű,  $\mathbf{E}^2$ -beli díszítéscsoportot:(1.ábra)

A p1 jelű két független eltolás által generált síkcsoporthból :  $\Gamma = (X, Y - XY = YX)$  kapjuk egy  $T$  félfordulat hozzávételével a p2 csoportot: a  $T_1 := TX, T_2 := TY, T_3 := T$  jelölésekkel :  $\Gamma = (T_1^2 = T_2^2 = T_3^2 = (T_1 T_2 T_3)^2 = E)(E \text{ az } \mathbf{E}^2 \text{ identikus egységtranszformációja})$ . A p2 csoport fundamentális tartományának egy tetszőleges háromszöget választva - a  $T_1, T_2, T_3$  generátorokkal, melyek a háromszög oldalfelezőpontjai körüli félfordulatokkal lesznek azonosak - az  $\mathbf{E}^2$  hézagmentes egyrétű kövezését nyerjük, tehát:

**Definíció:** Tércsoport vagy kristálycsoport a tér izometriáinak egy csoportja, mely csoport elemeivel egy megfelelő kompakt fundamentális tartományra hatva a tér hézagmentes és átfedés nélküli kikövezését nyerjük.  $\square$

A p2 esetben alaptartománynak az  $\mathbf{E}^2$  tetszőleges háromszögét választhatjuk. Ez a figyelemre méltó tény annak a következménye, hogy bármely két háromszög affin ekvivalens, és tércsoportok ekvivalenciájáról szól a következő tétel:

**Tétel(Frobenius-Bieberbach):** A  $\Gamma$  és  $\bar{\Gamma}$  kristálycsoportok izomorfak, ha létezik olyan  $\alpha$  affinitás, hogy:  $\bar{\Gamma} = \alpha^{-1}\Gamma\alpha := \{\alpha^{-1}\gamma\alpha : \gamma \in \Gamma\}$ .  $\square$

Ekkor tehát az izomorfizmust egy  $\alpha$  geometriai leképezés közvetíti, mely bármely  $\Gamma$ -pályát egy teljes  $\bar{\Gamma}$ -pályára képez.

A ma már klasszikusnak számító  $\mathbf{E}^3$ -beli 219 kristálycsoport meghatározása S.E.Fedorov, A.Schönflies (1891) nevéhez fűződik. Az analóg probléma 4 dimenzióban is megoldott, és elvileg „tetszőleges” dimenzióra kivitelezhető, ugyanis:

**Tétel(Schönflies-Bieberbach):** Tetszőleges  $d$ -dimenzióra  $\mathbf{E}^d$ -ben véges sok nem izomorf kompakt alaptartományú diszkrét transzformációcsoport létezik.  $\square$

## 2. Az $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$ tér és geometriája

Az  $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$  egyszerűen összefüggő Riemann tér a megfelelő  $G$  maximális izometriacsoporthal ellátva alkotja a 8 homogén 3 dimenziós geometria egyikét. Dolgozatunkban az  $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$  fibrált tér analitikus modelljét használjuk, a komponensek  $\mathbf{S}^2$  és  $\mathbf{R}$  a szokásos geometriai elképzeléssel. A tér az  $\mathbf{S}^2$ -beli és  $\mathbf{R}$  fibrumbeli pontok halmazának direkt szorzata, az  $(X, x)$  alakú párok ponthalmaza, ahol  $X \in \mathbf{S}^2, x \in \mathbf{R}$ .

**Definíció:**  $\text{Isom}(\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}) := \text{Isom}(\mathbf{S}^2) \times \text{Isom}(\mathbf{R})$   $\square$

A definíció jogosságának igazolását, lásd [5][6][7]-ben.

$\text{Isom}(\mathbf{S}^2) = \{A\}$ , ahol  $A \in \mathbf{O}(3) : \mathbf{S}^2 \mapsto \mathbf{S}^2 : (X, x) \mapsto (XA, x)$ , a  $3 \times 3$  ortogonális mátrixok csoportjával azonosítható.

$\text{Isom}(\mathbf{R}) = \{\varrho\}$ ,  $\varrho : (X, x) \mapsto (X, \pm x + r)$ , mely a - előjel esetén tükrözés az  $\frac{r}{2}$  pontra, + esetén eltolás, mely két ponttükrözés szorzata, a pontok előjeles távolsága  $\frac{r}{2}$ . Elevenítsük fel a tér izometriáinak az osztályozását(lásd [3]):

	<b>Id</b> $\mathbf{R}$	$\mathbf{R}_1$	$\mathbf{R}_2$
<b>Id</b> $\mathbf{S}^2$	<b>Id</b> ( $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$ )	$\mathbf{R}_1$	$\mathbf{R}_2$
$\mathbf{S}_1^2$	$\mathbf{S}_1^2$	$\mathbf{S}_1^2 \mathbf{R}_1$	$\mathbf{S}_1^2 \mathbf{R}_2$
$\mathbf{S}_2^2$	$\mathbf{S}_2^2$	$\mathbf{S}_2^2 \mathbf{R}_1$	$\mathbf{S}_2^2 \mathbf{R}_2$
$\mathbf{S}_3^2$	$\mathbf{S}_3^2$	$\mathbf{S}_3^2 \mathbf{R}_1$	$\mathbf{S}_3^2 \mathbf{R}_2$

ahol az alábbi tipikus transzformációhalmazokat vezettük be:

$\mathbf{S}_1^2$  - főkör síkjára való tükrözés,

$\mathbf{S}_2^2$  - gömbközépponton áthaladó tengely körüli forgatás, mely két főkörtükrözés szorzata

$\mathbf{S}_3^2$  - forgatás-tükrözés, mely három főkörtükrözés szorzata, melyek közül az első kettő merőleges a harmadikra. A gömb középpontjára való tükrözés is idetartozik, amikor a főkörök páronként merőlegesek.

$\mathbf{R}_1$  - tükrözés,

$\mathbf{R}_2$  - eltolás a fibrumok mentén, mely két tükrözés szorzata.

A tércsoportok tárgyalása előtt fontos megjegyeznünk, hogy a tér geometriája miatt esetünkben az  $\mathbf{R}$  fibrumok irányában egy dimenziós rács, azaz eltoláscsoport lép fel ellentétben  $\mathbf{E}^3$  -al ahol 3 független irányban kellett eltolást garantálnunk az alaptartomány kompaktságának megőrzése végett.

### 3. A tércsoportok ekvivalenciája

$\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$  kompakt alaptartományú  $\Gamma$  tércsoportjait keressük. Ezek tehát  $\Gamma = \{(A_1 \times \varrho_1), (A_2 \times \varrho_2), \dots, (A_n \times \varrho_n)\}$  alakúak,  $(A_i \times \varrho_i) = A_i \times (R_i, r_i)$ , ahol  $R_i = 1_{\mathbf{R}}$  egyelemű vagy pedig az  $1_{\mathbf{R}}$  által generált kételemű csoporthoz tartozik,  $1_{\mathbf{R}} : x \mapsto x$ ,  $\bar{1}_{\mathbf{R}} : x \mapsto -x$ ,  $A_i \in \text{Isom}(\mathbf{S}^2)$ .  $(A_i \times R_i)$  a transzformáció lineáris része,  $r_i$  az eltolási rész. Az  $1_{\mathbf{S}^2} \times 1_{\mathbf{R}}$  identikus transzformációhoz tartozó  $\mathbf{R}$ -beli eltolási részek egy egy-dimenziós eltoláscsoportot, azaz rácsot alkotnak, különben nem kapnánk kompakt alaptartományú csoportot. Ugyanis

$$(A_1 \times R_1, r_1) \circ (A_2 \times R_2, r_2) = (A_1 \circ A_2 \times R_1 R_2, r_1 R_2 + r_2) \quad (1)$$

mutatja, hogy a lineáris részek  $\Gamma_0$  csoportja homomorf képe a  $\Gamma$  csoportnak, mely a  $\Gamma_0$  csoport  $L_{\Gamma}$  rács szerinti faktorcsoporthoz azonosítható. Ebben a dolgozatban a leképezéseket jobbról írjuk (pl.[2],[5] szellemében).

**Definíció:** Két tércsoport,  $\Gamma_1$  és  $\Gamma_2$  geometriailag ekvivalens, azaz ekvivariáns, ha létezik az  $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$  térnek olyan „hasonlósága”  $\Sigma(S \times \sigma) \in \text{Sim}(\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R})$ , hogy  $S \in \text{Isom}(\mathbf{S}^2)$ ,  $\sigma : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ ,  $x \mapsto xa + b$ , azaz  $\sigma \in \text{Sim}(\mathbf{R})$ , és teljesül  $\Gamma_2 = \Sigma^{-1} \Gamma_1 \Sigma$ .  $\square$

A  $\Sigma$  hasonlóság tehát az  $L_{\Gamma_1}$  rácsot az  $L_{\Gamma_2}$  rácsba nagyítja, és a  $\Gamma_1$ -hez tartozó  $\mathbf{R}$ -beli kezdőpontot a  $\Gamma_2$ -höz tartozó  $\mathbf{R}$ -beli kezdőpontba viszi. A  $\Gamma_1$ -hez tartozó  $\mathbf{S}^2$ -n ható csoportot  $S$  a  $\Gamma_2$ -höz tartozó csoportra képezi. Tehát bármely  $\Gamma_1$ -pálya egy-egyértelműen valamely  $\Gamma_2$ -pályára képződik.

### 4. Pontcsoportok

Előbb a  $\Gamma$  tércsoport lehetséges  $\Gamma_0$  pontcsoportját keressük meg, majd az ezekhez tartozó  $\mathbf{R}$ -beli eltolási részeket.

**Tétel:** A lehetséges  $\Gamma_0$  pontcsoportok a következő 3 típusba tartoznak:

1.  $\Gamma_{\mathbf{S}^2} \times 1_{\mathbf{R}}$ , ahol  $\Gamma_{\mathbf{S}^2}$  egy  $\mathbf{S}^2$ -höz tartozó véges izometria csoport,  $1_{\mathbf{R}}$  az  $\mathbf{R}$   $x \mapsto x$  identikus leképezése

2.  $\Gamma_{\mathbf{S}^2} \times \langle \bar{1}_{\mathbf{R}} \rangle$ , ahol  $\langle \bar{1}_{\mathbf{R}} \rangle = \{x \mapsto -x, x \mapsto x\}$  az  $\mathbf{R}$  kételemű lineáris csoportja
3. Ha  $\hat{\Gamma}$  olyan véges  $\mathbf{S}^2$ -n ható izometria csoport, hogy  $\Gamma$  2-indexű (normális) részcsoport a  $\hat{\Gamma}$  véges csoportban, akkor ugyanilyen jelöléssel képezzük a  $\hat{\Gamma}\Gamma := \{\Gamma \times 1_{\mathbf{R}}\} \cup \{(\hat{\Gamma} \setminus \Gamma) \times \bar{1}_{\mathbf{R}}\}$  csoportot.

**Bizonyítás:** Az első két eset felléphet és nem ekvivariáns egymással. Ehhez a gömbi csoportok ekvivarianciája szükséges feltétel, akkor viszont a 2,- beli csoport 2-indexű részcsoportként tartalmazza a megfelelő 1,-beli csoportot. Véges csoportokról van szó, ami kizárja az izomorfiát méginkább az ekvivarianciát.

A 3, eset csoportjait a 2, eset csoportjaival kell összehasonlítani.  $\Gamma_{\mathbf{S}^2}$  és  $\Gamma$  ekvivarianciája szükséges feltétel, de akkor az  $\mathbf{S}^2$ -n ható  $\hat{\Gamma}$  2-indexű részcsoportként tartalmazza  $\Gamma_{\mathbf{S}^2}$ -t, ez kizárja az ekvivarianciát.

További  $\Gamma_0$  pontcsoportok nem léphetnek fel, mert nincs több kombinációs lehetőség:

Ha  $\mathbf{R}$ -ben csak  $1_{\mathbf{R}}$  lép föl, akkor nyilván az 1, eset jön számításba. Ha  $1_{\mathbf{R}}$  is fellép akkor  $\Gamma_0$   $1_{\mathbf{R}}$  komponensű elemei 2 indexű normális részcsoportot alkotnak, következésképp  $\Gamma_0$  nem lehet más, mint  $\Gamma_{\mathbf{S}^2} \times \langle \bar{1}_{\mathbf{R}} \rangle$ ,  $\hat{\Gamma}\Gamma$  a korábbi jelölésekkel. ■

## 5. Eltolási részek

A  $\Gamma_0$  pontcsoportokhoz tartozó eltolási részekre az ún. Frobenius-kongruenciákat kell megoldani  $\text{mod}(L_{\Gamma})$  egy rögzített egy-dimenziós  $L_{\Gamma}$  rácsra  $\mathbf{R}$ -ben, ahogy látni fogjuk. Ehhez a  $\Gamma_0$ -beli generátorokat és definiáló relációkat a leggazdaságosabban kell felírni, ami a Macbeath-szignatúrából lesz kiolvasható.

Az  $1_{\mathbf{S}^2} \times 1_{\mathbf{R}}$  elemhez tartozó  $\mathbf{R}$ -beli eltolási rész:  $\tau$  határozza meg  $L_{\Gamma}$ -t,  $L_{\Gamma} := \{k \cdot \tau, k \in \mathbf{Z}\}$ .

A pontcsoport generátoraihoz szóba jövő eltolási részeket a (3.1) képlet szerint határozzuk meg, a generátorok szorzási szabálya alapján. A tércsoportok generáló elemei a (3.1) képlet szerint a pontcsoport definiáló relációi alapján kell kielégítsék a Frobenius-féle kongruenciarelációkat, melyek nem ekvivariáns megoldásai adják meg a pontcsoport  $\Gamma_0$  generátoraihoz tartozó eltolási részeket. (A megoldások ekvivarianciájával később foglalkozunk.)

## 6. A tércsoportok felsorolása

A  $\Gamma$  csoportokat a lehetséges  $\Gamma_0$  pontcsoport típusok szerint haladva adjuk meg. Az ismétlések elkerülése végett csak a nem ekvivariáns tércsoportokat (megoldásokat) közöljük.

Ebben a dolgozatban csak a 8-14 gömbi csoportosztályokhoz tartozó tércsoportokat adjuk meg.

1.  $\Gamma_0 := \Gamma_{\mathbf{S}^2} \times 1_{\mathbf{R}}$   
Ez esetben tehát a  $\Gamma_0$  pontcsoport egy  $\mathbf{S}^2$ -beli csoportosztály határozza meg, melyeket a Macbeath szignatúrával jellemezünk.  $\Gamma_0$  generátorait -

melyeket  $g_1, g_2, \dots \in \text{Isom}(\mathbf{S}^2)$  jelöl - és a definiáló relációkat a felületi szignatúrából, és egy hozzá tartozó alaptartományból határozzuk meg.  $(g_1, \tau_1), (g_2, \tau_2), \dots$  legyenek az eltolási részekkel bővített elemek, melyek  $(e, \tau)$ -val generálják  $\Gamma$ -t.

A kongruenciarelációkat  $\text{mod}(\tau)$  oldjuk meg, ahol az  $L_\Gamma$  rácsot generáló „eltolásvektor” egyben az identitáshoz tartozó egyik legkisebb eltolási rész. Összhangban azonban az  $\mathbf{E}^3$  módszerrel  $\tau$ -t 1-nek választjuk. Ez megtehető, mivel  $\tau$  hasonlóság erejéig tetszőlegesen választható.

A 8,  $(+, 0; [2, 3, 3]; \{\})$  jelű esetet részletesen levezetjük, a többi csoportosztály esetében a  $\Gamma_0$  pontcsoport mellett csak a kongruenciarelációk nem ekviviáriáns megoldásait közöljük.

(a) 8.I.  $(+, 0; [2, 3, 3]; \{\})$

$$\Gamma_0 = (g_1, g_2 - g_1^2 = g_2^3 = (g_1 g_2)^3 = e)$$

$$(g_1, \tau_1)(g_1, \tau_1) = (g_1^2, 2\tau_1) \equiv (e, 0)$$

$$(g_2, \tau_2)(g_2, \tau_2)(g_2, \tau_2) = (g_2^3, 3\tau_2) \equiv (e, 0)$$

$$(g_1 g_2, \tau_1 + \tau_2)(g_1 g_2, \tau_1 + \tau_2)(g_1 g_2, \tau_1 + \tau_2) = (g_1 g_2, \tau_1 + \tau_2)((g_1 g_2)^2, 2\tau_1 + 2\tau_2) = ((g_1 g_2)^3, 3\tau_1 + 3\tau_2) \equiv (e, 0)$$

$$8.I.1 \ (\tau_1, \tau_2) \equiv (0, 0)$$

$$8.I.2 \ (\tau_1, \tau_2) \equiv (0, \frac{1}{3})$$

$$8.I.3 \ (\tau_1, \tau_2) \equiv (0, \frac{2}{3})$$

de 8.I.2  $\sim$  8.I.3:  $\varphi := (\bar{1}_{\mathbf{R}}, 0)$ -vel

$$\varphi^{-1}(g_2, \frac{2}{3})\varphi = (\bar{1}_{\mathbf{R}}, 0)(g_2, \frac{2}{3})(\bar{1}_{\mathbf{R}}) = (\bar{1}_{\mathbf{R}}, 0)(g_2 \bar{1}_{\mathbf{R}}, -\frac{2}{3}) \equiv (g_2, \frac{1}{3})$$

$$(\bar{1}_{\mathbf{R}}, 0)(g_1, 0)(\bar{1}_{\mathbf{R}}) = (\bar{1}_{\mathbf{R}}, 0)(g_1 \bar{1}_{\mathbf{R}}, 0) \equiv (g_1, 0).$$

(b) 9.I  $(+, 0; [2, 3, 4]; \{\})$

$$\Gamma_0 = (g_1, g_2 - g_1^2 = g_2^3 = (g_1 g_2)^4 = e)$$

$$9.I.1 \ (\tau_1, \tau_2) \equiv (0, 0)$$

$$9.I.2 \ (\tau_1, \tau_2) \equiv (\frac{1}{2}, 0)$$

(c) 10.I  $(+, 0; [2, 3, 5]; \{\})$

$$\Gamma_0 = (g_1, g_2 - g_1^2 = g_2^3 = (g_1 g_2)^5 = e)$$

$$10.I.1 \ (\tau_1, \tau_2) \equiv (0, 0)$$

(d) 11.I  $(+, 0; []; \{(2, 3, 3)\})$

$$\Gamma_0 = (g_1, g_2, g_3 - g_1^2 = g_2^2 = g_3^2 = (g_1 g_2)^2 = (g_2 g_3)^3 = (g_1 g_3)^3 = e)$$

$$11.I.1 \ (\tau_1, \tau_2, \tau_3) \equiv (0, 0, 0)$$

$$11.I.2 \ (\tau_1, \tau_2, \tau_3) \equiv (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

(e) 12.I (+, 0; []; {(2, 3, 4)})

$$\Gamma_0 = (g_1, g_2, g_3 - g_1^2 = g_2^2 = g_3^2 = (g_1g_2)^2 = (g_2g_3)^3 = (g_1g_3)^4 = e)$$

$$12.I.1 (\tau_1, \tau_2, \tau_3) \equiv (0, 0, 0)$$

$$12.I.2 (\tau_1, \tau_2, \tau_3) \equiv (0, 0, \frac{1}{2})$$

$$12.I.3 (\tau_1, \tau_2, \tau_3) \equiv (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$$

$$12.I.4 (\tau_1, \tau_2, \tau_3) \equiv (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

(f) 13.I (+, 0; []; {(2, 3, 5)})

$$\Gamma_0 = (g_1, g_2, g_3 - g_1^2 = g_2^2 = g_3^2 = (g_1g_2)^2 = (g_2g_3)^3 = (g_1g_3)^5 = e)$$

$$13.I.1 (\tau_1, \tau_2, \tau_3) \equiv (0, 0, 0)$$

(g) 14.I (+, 0; [3]; {(2)})

$$\Gamma_0 = (g_1, g_2 - g_1^2 = g_2^3 = (g_2g_1g_2^{-1}g_1)^2 = e)$$

$$14.I.1 (\tau_1, \tau_2) \equiv (0, 0)$$

$$14.I.2 (\tau_1, \tau_2) \equiv (0, \frac{1}{3})$$

$$14.I.3 (\tau_1, \tau_2) \equiv (\frac{1}{2}, 0)$$

$$14.I.4 (\tau_1, \tau_2) \equiv (\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$$

2.  $\Gamma_0 := \Gamma_{\mathbf{S}^2} \times \bar{\Gamma}_{\mathbf{R}}$

Most az  $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$   $\Gamma_0$  pontcsoportja a fenti direkt szorzat, a pontcsoport generátorai a megfelelő  $\mathbf{S}^2$  csoport generáló elemei, melyeket továbbra is  $g_1, g_2, \dots$  jelöl, illetve az  $\bar{\Gamma}_{\mathbf{R}}$  tükrözés, melyet  $\bar{g}$  jelöl. Hasonlóan 1,-hez  $\Gamma$ -t  $(g_1, \tau_1), (g_2, \tau_2), \dots$  generálja.

A definiáló relációk felírásakor minimális prezentálásra törekszünk.  $\overline{(\dots)}$  jelöli a megfelelő szignatúrához tartozó  $\bar{\Gamma}_{\mathbf{R}}$ -el vett direkt szorzatot. A 8, esetet részletesen levezetjük, a többi osztálynál az I. esethez hasonlóan járunk el.

(a) 8.II  $\overline{(+, 0; [2, 3, 3]; \{\})}$

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= (g_1, g_2, \bar{g}_3 - g_1^2 = g_2^3 = \bar{g}_3^2 = (g_1g_2)^3 = \\ &= (g_1\bar{g}_3g_1^{-1}\bar{g}_3) = (g_2\bar{g}_3g_2^{-1}\bar{g}_3) = e) \end{aligned}$$

$$(g_1, \tau_1)(g_1, \tau_1) = (g_1^2, 2\tau_1) \equiv (e, 0)$$

$$(g_2, \tau_2)(g_2, \tau_2)(g_2, \tau_2) = (g_2, \tau_2)(g_2^2, 2\tau_2) = (g_2^3, 3\tau_3) \equiv (e, 0)$$

$$(g_1g_2, \tau_1 + \tau_2)(g_1g_2, \tau_1 + \tau_2)(g_1g_2, \tau_1 + \tau_2) = (g_1g_2, \tau_1 + \tau_2)((g_1g_2)^2, 2\tau_1 + 2\tau_2) = ((g_1g_2)^3, 3\tau_1 + 3\tau_2) \equiv (e, 0)$$

$$(\bar{g}_3, \tau_3)(\bar{g}_3, \tau_3) = (e, -\tau_3 + \tau_3) \equiv (e, 0)$$

$$(g_1, \tau_1)(\bar{g}_3, \tau_3)(g_1^{-1}, -\tau_1)(\bar{g}_3, \tau_3) = (g_1, \tau_1)(\bar{g}_3, \tau_3)(g_1^{-1}\bar{g}_3, \tau_1 + \tau_3) =$$

$$(g_1, \tau_1)(\bar{g}_3g_1^{-1}\bar{g}_3, \tau_1 + \tau_3 - \tau_3) = g_1\bar{g}_3g_1^{-1}\bar{g}_3, 2\tau_1) \equiv (e, 0)$$

$$(g_2, \tau_1)(\bar{g}_3, \tau_3)(g_2^{-1}, -\tau_1)(\bar{g}_3, \tau_3) = (g_2, \tau_1)(\bar{g}_3, \tau_3)(g_2^{-1}\bar{g}_3, \tau_1 + \tau_3) = (g_2, \tau_1)(\bar{g}_3 g_2^{-1}\bar{g}_3, \tau_1 + \tau_3 - \tau_3) = g_2 \bar{g}_3 g_2^{-1} \bar{g}_3, 2\tau_1) \equiv (e, 0)$$

$$8.II.1 (\tau_1, \tau_2, \tau_3) \equiv (0, 0, \tau_3)$$

Bármely két különböző  $\tau_3$  és  $\tau_3'$  értékhez tartozó megoldások ekvivalens csoportokat adnak:

$$(\sigma^{-1}, 0)(\bar{g}_3, \tau_3)(\sigma, 0) = (\sigma^{-1}, 0)(\bar{g}_3 \sigma, \sigma \tau_3) = (\sigma^{-1} \bar{g}_3 \sigma, \sigma \tau) = (\bar{g}_3, \sigma \tau)$$

és  $\sigma := \frac{\tau_3'}{\tau_3}$ .

Egyetlen megoldás a 8.I esettel ellentétben. Ez a figyelemre méltó tény annak a következménye, hogy az  $\mathbf{R}$ -beli tükrözés  $\mathbf{R}$ -ben és  $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$ -ben orientációváltó transzformáció, de nem  $\mathbf{S}^2$ -ben! (Faktorstruktúra.)

$$(b) \ 9.II \overline{(+, 0; [2, 3, 4]; \{\}})$$

$$\Gamma_0 = (g_1, g_2, \bar{g}_3 - g_1^2 = g_2^3 = \bar{g}_3^2 = (g_1 g_2)^4 = (g_1 \bar{g}_3 g_1^{-1} \bar{g}_3) = g_2 \bar{g}_3 g_2^{-1} \bar{g}_3) = e)$$

$$9.I.1 (\tau_1, \tau_2, \tau_3) \equiv (0, 0, 0)$$

$$9.I.2 (\tau_1, \tau_2, \tau_3) \equiv (\frac{1}{2}, 0, 0)$$

$$(c) \ 10.II \overline{(+, 0; [2, 3, 5]; \{\}})$$

$$\Gamma_0 = (g_1, g_2, \bar{g}_3 - g_1^2 = g_2^3 = \bar{g}_3^2 = (g_1 g_2)^5 = e) = (g_1 \bar{g}_3 g_1^{-1} \bar{g}_3) = (g_2 \bar{g}_3 g_2^{-1} \bar{g}_3) = e)$$

$$10.II.1 (\tau_1, \tau_2, \tau_3) \equiv (0, 0, 0)$$

$$(d) \ 11.II \overline{(+, 0; []; \{(2, 3, 3)\}})$$

$$\Gamma_0 = (g_1, g_2, g_3, \bar{g}_4 - g_1^2 = g_2^2 = g_3^2 = \bar{g}_4^2 = (g_1 g_2)^2 = (g_2 g_3)^3 = e) = (g_1 g_3)^3 = (g_1 \bar{g}_4)^2 = (g_2 \bar{g}_4)^2 = (g_3 \bar{g}_4)^2 = e)$$

$$11.II.1 (\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) \equiv (0, 0, 0, 0)$$

$$11.II.2 (\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) \equiv (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$$

$$(e) \ 12.II \overline{(+, 0; []; \{(2, 3, 4)\}})$$

$$\Gamma_0 = (g_1, g_2, g_3, \bar{g}_4 - g_1^2 = g_2^2 = g_3^2 = \bar{g}_4^2 = (g_1 g_2)^2 = (g_2 g_3)^3 = e) = (g_1 g_3)^4 = (g_1 \bar{g}_4)^2 = (g_2 \bar{g}_4)^2 = (g_3 \bar{g}_4)^2 = e)$$

$$12.II.1 (\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) \equiv (0, 0, 0, 0)$$

$$12.I.2 (\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) \equiv (0, 0, \frac{1}{2}, 0)$$

$$12.I.3 (\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) \equiv (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$$

$$12.I.4 (\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) \equiv (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$$

(f) 13.II  $\overline{(+, 0; []; \{(2, 3, 5)\}}$

$$\begin{aligned}\Gamma_0 &= (g_1, g_2, g_3, \bar{g}_4 - g_1^2 = g_2^2 = g_3^2 = \bar{g}_4^2 = (g_1 g_2)^2 = (g_2 g_3)^3 = \\ &= (g_1 g_3)^5 = (g_1 \bar{g}_4)^2 = (g_2 \bar{g}_4)^2 = (g_3 \bar{g}_4)^2 = e)\end{aligned}$$

13.II.1  $(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) \equiv (0, 0, 0, 0)$

(g) 14.II  $\overline{(+, 0; [3]; \{(2)\}}$

$$\begin{aligned}\Gamma_0 &= (g_1, g_2, \bar{g}_3 - g_1^2 = g_2^3 = \bar{g}_3^2 = (g_2 g_1 g_2^{-1} g_1)^2 = \\ &= (g_1 \bar{g}_3)^2 = (g_2 \bar{g}_3 g_2^{-1} \bar{g}_3) = e)\end{aligned}$$

14.II.1  $(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \equiv (0, 0, 0)$

14.II.2  $(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \equiv (\frac{1}{2}, 0, 0)$

3.  $\Gamma_0 := \dot{\Gamma}\Gamma$

Most a  $\dot{\Gamma}$  gömbi csoportnak  $\Gamma$  2 indexű normális részcsoportja,  $\dot{\Gamma}\Gamma = (\Gamma \times \mathbf{1}_{\mathbf{R}}) \cup (\dot{\Gamma} \setminus \Gamma \times \mathbf{1}_{\mathbf{R}})$ . Először megkeressük a szóba jövő  $\dot{\Gamma} \Gamma$  párokat, majd a  $\Gamma$  csoportot bővítjük egy involutív elemmel.

A 12.III esetet részletezzük a további eseteket az eddigiek(1-es, 2-es típus) mintájára tárgyaljuk.

(a) 12.III.a  $\overline{(+, 0, []; \{(2, 3, 4)\}}(+, 0; [3]; \{(2)\})$

$$\Gamma_0 = (g_1, g_2, \bar{g}_3 - g_1^2 = g_2^3 = \bar{g}_3^2 = (g_1 g_2^{-1} g_1 g_2) = (g_1 \bar{g}_3)^2 = (g_2 \bar{g}_3)^2 = e)$$

$$(g_1, \tau_1)(g_1, \tau_1) = (e, 2\tau_1) \equiv (e, 0)$$

$$(g_2, \tau_2)(g_2, \tau_2)(g_2, \tau_2) = (e, 3\tau_2) \equiv (e, 0)$$

$$(\bar{g}_3, \tau_3)(\bar{g}_3, \tau_3) = (e, -\tau_3 + \tau_3) \equiv (e, 0)$$

$$(g_1, \tau_1)(g_2^{-1}, -\tau_2)(g_1, \tau_1)(g_2, \tau_2) = \dots = (e, 2\tau_1) \equiv (e, 0)$$

$$(g_1, \tau_1)(\bar{g}_3, \tau_3)(g_1, \tau_1)(\bar{g}_3, \tau_3) = \dots = (e, 0) \equiv (e, 0)$$

$$(g_2, \tau_1)(\bar{g}_3, \tau_3)(g_2, \tau_1)(\bar{g}_3, \tau_3) = \dots = (e, 0) \equiv (e, 0)$$

$$12.III.a.1 (\tau_1, \tau_2, \tau_3) \equiv (0, 0, \tau_3)$$

$$12.III.a.2 (\tau_1, \tau_2, \tau_3) \equiv (0, \frac{1}{3}, \tau_3)$$

$$12.III.a.3 (\tau_1, \tau_2, \tau_3) \equiv (\frac{1}{2}, 0, \tau_3)$$

$$12.III.a.4 (\tau_1, \tau_2, \tau_3) \equiv (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \tau_3)$$

$$12.III.a.5 (\tau_1, \tau_2, \tau_3) \equiv (0, \frac{2}{3}, \tau_3)$$

$$12.III.a.6 (\tau_1, \tau_2, \tau_3) \equiv (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \tau_3),$$

12.III.a.5  $\sim$  12.III.a.2 a  $\varphi := (\bar{\mathbf{1}}_{\mathbf{R}}, 0)$ -vel és

12.III.a.6  $\sim$  12.III.a.4 szintén a  $\varphi := (\bar{\mathbf{1}}_{\mathbf{R}}, 0)$ -vel.

Továbbá természetesen itt is bármely két különböző  $\tau_3$  értékhez tartozó megoldások  $\varphi := (\sigma, 0)$  megfelelő  $\sigma$ -val ekvivariánsak.

(b) 12.III.b  $\overline{(+, 0, []; \{(2, 3, 4)\}}(+, 0; [2, 3, 4]; \{\})$

$$\Gamma_0 = (g_1, g_2, \bar{g}_3 - g_1^2 = g_2^3 = \bar{g}_3^2 = (g_1 g_2)^4 = (g_1 \bar{g}_3)^2 = (g_2 \bar{g}_3)^2 = e)$$

## 7. A megoldások ekvivarianciája

A tércsoportok egyértelműségéhez a pontcsoportok egyértelműsége szükséges feltétel. A szóba jövő pontcsoportokra a kongruencialációk megoldásai adják az összes lehetséges megoldást. Ezekre alkalmazva az ekvivariancia feltételét kapjuk a nem ekviviáns megoldásokat. Tehát a kongruencialációk megoldásaival nyert csoportok halmazát faktorizáljuk a  $\Sigma \in \text{Sim}(\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R})$  elemmel.

Az ekvivarianciának a kritériumát három típusban alkalmaztuk:

1. Az identitáshoz tartozó eltolási rész  $\tau$  tetszőlegesen választható, bármely két különböző  $\tau$  és  $\tau'$  értékhez tartozó megoldások a  $\Sigma : (\sigma, 0)$  hasonlósági transzformációval ekviviáns csoportok:  
 $(\sigma^{-1}, 0)(e, \tau)(\sigma, 0) = (\sigma^{-1}, 0)(e\sigma, \sigma\tau + 0) = (\sigma^{-1}e\sigma, \sigma\tau) = (e, \sigma\tau)$  ha  $\sigma := \frac{\tau'}{\tau}$ .
2. A 2,-es és 3,-as pontcsoporttípusoknál az  $\bar{\mathbf{I}}_{\mathbf{R}}$  komponensű  $\bar{g}$  transzformációhoz tartozó eltolási rész tetszőleges, bármely két különböző  $\tau$  és  $\tau'$  értékhez tartozó csoportok ekviviánsak:  
 $(\bar{g}, \tau)(\bar{g}, \tau) = (\bar{g}\bar{g}, -\tau + \tau) = (e, 0)$   
 $(\sigma^{-1}, 0)(\bar{g}, \tau)(\sigma, 0) = (\sigma^{-1}, 0)(\bar{g}\sigma, \sigma\tau) = (\sigma^{-1}\bar{g}\sigma, \sigma\tau) = (\bar{g}, \sigma\tau)$   
 $\sigma := \frac{\tau'}{\tau}$ .
3. Ha a kongruencialációk megoldása után a gömbi generátorhoz  $\frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \dots, \frac{k}{q}$  eltolási részek tartozhatnak, akkor  $k := \lfloor \frac{q}{2} \rfloor$ , ugyanis  $l \leq k$ -ra:  
 $\Sigma := (\bar{\mathbf{I}}_{\mathbf{R}}, 0)$   
 $(\bar{\mathbf{I}}_{\mathbf{R}}, 0)(g_i, \frac{q-l}{q})(\bar{\mathbf{I}}_{\mathbf{R}}, 0) = (\bar{\mathbf{I}}_{\mathbf{R}}, 0)(g_i\bar{\mathbf{I}}_{\mathbf{R}}, \frac{l-q}{q}) = (g_i, \frac{l-q}{q})$  már szerepelt.

## 8. Ábrák

## Hivatkozások

- [1] Coxeter, H.S.M.: A geometriák alapjai, Műszaki Könyvkiadó (1973)
- [2] Coxeter, H.S.M.; Moser, W.O.J.: Generators and relations for discrete groups, fourth ed. Springer-Verlag (1980)
- [3] Farkas, J.Z.: Az  $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$  és  $\mathbf{H}^2 \times \mathbf{R}$  terek izometriáiról. TDK dolgozat, BME 1998.
- [4] Macbeath A.M.: The classification of the non-euclidean crystallographic plane groups. *Canadian Journal Math.* (1967), 1193-1205.
- [5] Molnár, E.: The projective interpretation of the eight 3-dimensional homogeneous geometries. *Beiträge zur Algebra und Geometrie*, Vol.38 (1997), No.2. 261-288.
- [6] Scott, P.: The geometries of 3-manifolds. *Bull. London Math. Soc.* 15 (1983), 401-487.
- [7] Thurston, W. P.: Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry. *Bull. Amer. Math. Soc.* 6 (1982), 357-381.