

Az $\mathbf{S}^2 \times \mathbb{R}$ és $\mathbf{H}^2 \times \mathbb{R}$ terek izometriáiról

Farkas József Zoltán

Budapesti Műszaki Egyetem Természettudományi Kar
II. évf. alkalmazott matematikus

Témavezető: Dr. Molnár Emil egyetemi tanár
TDK dolgozat
1998.október

Kivonat

A gömbfelület és a valós számegegyenes, valamint a hiperbolikus sík és a valós számegegyenes összekapcsolásaként létrejött terek az $\mathbf{S}^2 \times \mathbb{R}$, illetve a $\mathbf{H}^2 \times \mathbb{R}$ tér a 8 homogén 3 dimenziós tér($\mathbf{E}^3, \mathbf{S}^3, \mathbf{H}^3, \mathbf{S}^2 \times \mathbb{R}, \mathbf{H}^2 \times \mathbb{R}, \widetilde{\mathbf{SL}}_2\mathbb{R}, \mathbf{Nil}, \mathbf{Sol}$) közé tartoznak. Ezen terek meghatározása, és leírása az utóbbi évek, és évtizedek nem érdektelen matematikai eredményei közé tartozik, melyre B.N. Apanasov[1], Molnár Emil[3], P. Scott[4] és W.P. Thurston[5] munkáiban került sor. Dolgozatom célja ezen $\mathbf{S}^2 \times \mathbb{R}$ és $\mathbf{H}^2 \times \mathbb{R}$ terek izometriáinak a vizsgálata és osztályozása az \mathbf{E}^3 euklideszi tér analógiájára.

1. Bevezetés

Definiáljuk először $\mathbf{S}^2 \times \mathbb{R}$ -t, majd $\mathbf{H}^2 \times \mathbb{R}$ -t, és a rajtuk értelmezett geometriát: $\mathbf{S}^2 \times \mathbb{R}$ egyszerűen összefüggő Riemann tér, méghozzá az \mathbf{S}^2 szférikus sík (gömbfelület), és az \mathbb{R} számegegyenes által képzett Descartes-féle szorzat, mint ponthalmaz. A $\mathbf{H}^2 \times \mathbb{R}$ tér szintén egyszerűen összefüggő Riemann tér, a hiperbolikus sík és az \mathbb{R} számegegyenes által képzett szorzattér. Ezeket a tereket a megfelelő G izometriacsoporttal (Izometria: a térnek olyan önmagára való leképezése, mely megőrzi a pontpárok távolságát a megfelelő metrikában.) ellátva kapjuk meg a 8 homogén 3 dimenziós geometria két elemét. $G_1 = \text{Isom}(\mathbf{S}^2 \times \mathbb{R}) := \text{Isom}(\mathbf{S}^2) \times \text{Isom}(\mathbb{R})$, $G_2 = \text{Isom}(\mathbf{H}^2 \times \mathbb{R}) := \text{Isom}(\mathbf{H}^2) \times \text{Isom}(\mathbb{R})$ adják meg ezeket az izometriacsoportokat, tehát a gömbi egybevágóságokat, illetve a hiperbolikus sík izometriáit kombináljuk az \mathbb{R} számegegyenes egybevágóságaival. A homogenitás azt jelenti, hogy a tér bármely pontját bármely pontra leképezi egy G -beli izometria. Az \mathbf{E}^3 térben ilyen izometriák például az eltolások. Legyen ezek után G egy tetszőleges (fenti homogén) tér izometriáinak a csoportja, azaz a tér bármely egybevágósága álljon elő ezen izometriák kompozíciójaként, vagyis a csoportelemek szorzataként. G legyen maximális abból a szempontból, hogy semmilyen értelmes kiterjesztése sem hathat a téren a fent definiált izometrikus módon.

Elevenítsük most fel az euklideszi sík, és tér izometriáinak az osztályozását. Mindkét esetben beszéltünk irányítástartó, és irányításváltó egybevágósági transzformációkról, aszerint, hogy a jobbrendszer alkotó koordináta egységvektorok az egybevágósági leképezés során jobb-, illetve balrendszerbe transzformálódnak. Ezen terek egybevágósági transzformációinak az osztályozása után kellemesnek látszott bármely izometriát csak tükrözések szorzataként előállítani, így születtek meg a jól ismert tételek, miszerint:

\mathbf{E}^2 -ben bármely egybevágóság előáll 3 egyenestükrözés szorzataként, valamint \mathbf{E}^3 -ban 4 síktükrözés kompozíciójaként. Ma már, amikor számos más „jól definiált” teret ismerünk és vizsgálunk, érdemesnek látszik ezt a két tételt az izometriacsoportok vizsgálatának tárgykörében standard tételeknek tekinteni, és valamilyen módon az adott tér és az euklideszi tér közötti párhuzamok és analógiák tanulmányozását a figyelem középpontjába helyezni. Ezt két dologgal is alá tudom támasztani: egyrészt az \mathbf{E}^3 -ban, mint gazdag szimmetriacsoporttal rendelkező térben alkalmazott módszer rendkívül egyszerű, ”szép” formát és leírást biztosított számunkra, másrészt az analógiák keresése jól bevált módszere a matematikának, és főként a geometriának. Ezt a gondolatot követve próbáljuk föltárni az $\mathbf{S}^2 \times \mathbb{R}$, illetve a $\mathbf{H}^2 \times \mathbb{R}$ terek izometriáit. Ebben követjük F. Bachmann[2] gondolatmenetét, mely Hjelmslev munkáiból indult ki.

2. Az $\mathbf{S}^2 \times \mathbb{R}$ tér modellje

Nézzük most az $\mathbf{S}^2 \times \mathbb{R}$ tér egy lehetséges (projektív) modelljét:

Tekintsük az \mathbf{E}^3 euklideszi teret, és tüntessünk ki egy \circ pontot. Tekintsük most az \circ középpontú r -sugarú gömböket ($0 < r \in \mathbb{R}$). Nyilván ezek bármelyikével interpretálhatjuk az \mathbf{S}^2 -szférikus síkot. Vegyük továbbá az összes \circ -n „áthaladó”, félegyeneset, ezek lesznek az úgynevezett szálak vagy fibrumok, mindegyiket, mint \mathbb{R} valós számegegyenest tekintve. Minden szálnak két ideális pontja legyen \circ a $-\infty$ és a félegyenes végtelen távoli

pontja a $+\infty$. A félegyenesek végtelen távoli pontjai alkotják az \mathbf{E}^3 tér — szokásostól eltérő — ideális pontjait. Ezen ideális pontokat egyetlen ∞ ponttá egyesítve kapjuk az $\mathbf{E}^3 \cup \{\infty\}$ konform lezárást, Ω -t. $\Omega \setminus \{0, \infty\} = \mathbf{E}^3 \setminus \{0\} := \mathbf{E}$ modellezi majd $\mathbf{S}^2 \times \mathbb{R}$ -et. 1.ábra

Könnyen látható, hogy ez a modell kielégíti a definíciót, azaz egy \mathbf{S}^2 -szférikus síkot rögzítve (ez lesz a $0 \in \mathbb{R}$ szint), és az ebből kifelé (+ irányban), és befelé (- irányban) kinövő szálakat véve, a tér pontjai pontosan az (X, y) alakú pontpárok halmaza, ahol X a kitüntetett \mathbf{S}^2 -szférikus sík pontja, és $y \in \mathbb{R}$.

A tér izometriái definíció szerint legyenek:

$$Isom(\mathbf{S}^2 \times \mathbb{R}) := Isom(\mathbf{S}^2) \times Isom(\mathbb{R}).$$

Az így értelmezett izometriák fibrumtartóak lesznek.

3. $Isom(\mathbf{S}^2)$

Térjünk át most már a konkrét vizsgálatokra, és elevenítsük föl \mathbf{S}^2 izometriáit, mint $Isom(\mathbf{S}^2) \times Id \mathbb{R}$ elemeit:

Létezik az \circ középponton áthaladó szál, mint tengely körüli forgatás, amely bármely gömbfelület két átellenes pontja (P és P') körüli forgatásnak fog megfelelni. Ezek teljesen kimerítik az \mathbf{S}^2 gömbi mozgásokat. Az euklideszi esethez hasonlóan bármely ilyen forgatás előáll két gömbi főkörre való tükrözés kompozíciójaként (a főkörök tartalmazzák a P és P' pontokat), ahol ráadásul az egyik „tükrötengelyt” tetszőlegesen megválaszthatom a P, P' pontokon keresztül, a másik ekkor automatikusan adódik.

Irányításváltó transzformáció lesz a főkörre, mint tengelyre való tükrözés, valamint egy forgatás és egy tükrözés kombinációjaként előálló forgatástükrözés, az euklideszi csúsztatva tükrözés mintájára. Ezen egybevágóság három tükrözéssel helyettesíthető, ahol az első tengely síkját a forgástengelyen át tetszőlegesen választhatom meg, a második ekkor rögzül, a harmadik tengely pedig merőleges az első kettőre.

Ezek szerint beszélhetünk $Isom \mathbf{S}^2$ -ről, mint az alábbi három részhalmaz egyesítéséről:

- $\bullet \mathbf{S}_1^2$ egy tükrözésből álló izometriák, azaz tükrözés egy gömbi t főkörre;
- $\bullet \mathbf{S}_2^2$ két tükrözés szorzatai, ezek bármelyike forgatás egy PP' pontpár körül, azaz tükrözés a PP' egyenesre illeszkedő síkú t_1 és t_2 főkörökre;
- $\bullet \mathbf{S}_3^2$ három tükrözés szorzatai, ezek mindegyike forgatás egy PP' pontpár körül, majd tükrözés a PP' egyenesre merőleges síkú t főkörre.

Azaz \mathbf{S}^2 -ben bármely egybevágóság előáll legfeljebb három tükrözés kompozíciójaként. Fontos megemlíteni, hogy mik lesznek az involutív tükrözéskombinációk, amikor egy α leképezésre $\alpha\alpha = \text{identitás} =: 1$, de $\alpha \neq 1$.

A főkörre való tükrözéseken kívül ezek az $\alpha = t_1 t_2$ forgatások, ha $t_1 \perp t_2$ továbbá $\beta = t_1 t_2 t$ ha $t_1 \perp t_2 \perp t$. Első esetben gömbi pontpártükrözésről, a második esetben \circ középpontú tükrözésről beszélünk, mely fixpontmentes transzformáció lesz a gömbfelületen.

4. Isom(\mathbb{R})

Tekintsük ezek után az \mathbb{R} -beli izometriákat $\mathbf{S}^2 \times \mathbb{R}$ -ben, tehát $\text{Id } \mathbf{S}^2 \times \text{Isom}(\mathbb{R})$ elemeit:

Az \mathbb{R} valós számegegyenes izometriái a következők:

- •eltolás egy \mathbb{R} -beli vektorral $a(a) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, x \mapsto x + a$
- •az \mathbb{R} egy s pontjára való tükrözés, $\sigma(s) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, x \mapsto -x + 2s$.

Ezek analógiájaként tekintsük a következőket az $\mathbf{S}^2 \times \mathbb{R}$ tér \mathbf{E} modelljében:

4.1. Eltolás:

Tekintsük az $\mathbf{S}^2 \times \mathbb{R}$ tér fenti \mathbf{E} modelljének \circ centrumú, λ arányú ($0 < \lambda \in \mathbb{R}$) nyújtását, tehát $\tau(t) : \mathbf{S}^2 \times \mathbb{R} \mapsto \mathbf{S}^2 \times \mathbb{R}, (X, y) \mapsto (X, y + t)$ értelmezi a tér eltolását, ahol $t = \log \lambda$ szerint képezzük \mathbb{R}^+ multiplikatív csoportját az \mathbb{R} additív csoportjára.

4.2. Tükrözések:

Tekintsük az \mathbf{E} tér tetszőleges r -sugarú gömbfelületeire vonatkozó gömbinverziókat. Jól tudjuk, a gömbre vonatkozó inverzió az \mathbf{E} térnek önmagára való involutív (szögtartó, gömbtartó) leképezése, ahol az adott gömb felülete pontonként fix marad, a gömb „lyukas középpontú,, illetve az \circ középpont képe a ∞ pont. (Ezek miatt is érdemes az $\mathbf{S}^2 \times \mathbb{R}$ -et projektív térben, sőt a projektív gömbön modellezni.) A pontonkénti leképezés a jól ismert képlet alapján történik:

$$\circ P \cdot \circ P' = r^2;$$

ahol $\circ P$ a P pont középponttól mért távolsága, $\circ P'$ a P pont P' képének a középponttól mért távolsága, P' az $\circ P$ félegyenesen legyen. A pontok szokásos derékszögű koordinátái a következőképpen változnak az r -sugarú gömbre vonatkozó σ inverzió esetén:

$$\sigma : (x, y, z) \mapsto \left(\frac{r^2 x}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{r^2 y}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{r^2 z}{x^2 + y^2 + z^2} \right) =: (x^\sigma, y^\sigma, z^\sigma)$$

Az inverzió tehát megfordít minden egyes \mathbb{R} fibrumot, a gömbfelület viszont pontonként fix marad.

Valóban teljesül a definíció

$$\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)} \sqrt{\frac{r^4(x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}} = r^2.$$

Nézzük most mi lesz két inverzió szorzata:

$$\sigma_1(x, y, z) \mapsto \left(\frac{r_1^2 x}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{r_1^2 y}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{r_1^2 z}{x^2 + y^2 + z^2} \right) =: (x^{\sigma_1}, y^{\sigma_1}, z^{\sigma_1})$$

és

$$\sigma_2 : (x^{\sigma_1}, y^{\sigma_1}, z^{\sigma_1}) \mapsto (x^{\sigma_1 \sigma_2}, y^{\sigma_1 \sigma_2}, z^{\sigma_1 \sigma_2}) =$$

$$\left(\frac{r_2^2 \left(\frac{r_1^2 x}{x^2 + y^2 + z^2} \right)}{r_1^4 \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \right)}, \frac{r_2^2 \left(\frac{r_1^2 y}{x^2 + y^2 + z^2} \right)}{r_1^4 \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \right)}, \frac{r_2^2 \left(\frac{r_1^2 z}{x^2 + y^2 + z^2} \right)}{r_1^4 \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \right)} \right) = \left(\frac{r_2^2}{r_1^2} x, \frac{r_2^2}{r_1^2} y, \frac{r_2^2}{r_1^2} z \right).$$

Ezek után értelmezhetjük a λ -nyújtást két inverzió szorzataként, azaz a λ arányra:

$$\lambda = \frac{r_2^2}{r_1^2}.$$

Ezzel be is láttuk, hogy bármely λ -nyújtás előáll két inverzió szorzataként, sőt az egyik sugarát tetszőlegesen választhatjuk meg. (Vegyük észre, hogy ez teljesen hasonlóan működik az euklideszi térben is.)

Nézzük most meg, hogy mi lesz egy λ arányú nyújtás, és R_2 inverzió szorzata:

A λ arányt felírhatjuk: $\frac{r_2^2}{r_1^2}$ alakban, ahol r_2 -et tetszőlegesen választhatom. Válasszam R_2 -nek, így az Σ_2 inverzió hatására

$$\Lambda \Sigma_2 = \Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_2 = \Sigma_1$$

egyetlen R_1 sugarú Σ_1 gömbinverziót kapunk. Tehát $\text{Isom}(\mathbb{R})$ az \mathbf{E} modellterben az alábbi részhalmazok egyesítése:

- \mathbb{R}_1 inverziók : tükrözések
- \mathbb{R}_2 nyújtások : két tükrözés szorzatai.

5. $\text{Isom}(\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R})$

Ezen előzmények után, állítsuk elő $\text{Isom}(\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R})$ -et:

	Id \mathbb{R}	\mathbb{R}_1	\mathbb{R}_2
Id \mathbf{S}^2	Id $(\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R})$	\mathbb{R}_1	\mathbb{R}_2
\mathbf{S}_1^2	\mathbf{S}_1^2	$\mathbf{S}_1^2 \mathbb{R}_1$	$\mathbf{S}_1^2 \mathbb{R}_2$
\mathbf{S}_2^2	\mathbf{S}_2^2	$\mathbf{S}_2^2 \mathbb{R}_1$	$\mathbf{S}_2^2 \mathbb{R}_2$
\mathbf{S}_3^2	\mathbf{S}_3^2	$\mathbf{S}_3^2 \mathbb{R}_1$	$\mathbf{S}_3^2 \mathbb{R}_2$

Elnevezhetjük az így kialakult 12 típust a felhasznált tükrözések számától függően:

- Identitás=1
- Tükrözések: \mathbf{S}_1^2 , \mathbb{R}_1
- Eltolások és forgatások: \mathbb{R}_2 , \mathbf{S}_2^2 , $\mathbf{S}_1^2 \cdot \mathbb{R}_1$
- Eltolás- és forgatástükrözések: $\mathbf{S}_1^2 \cdot \mathbb{R}_2$, $\mathbf{S}_2^2 \cdot \mathbb{R}_1$, \mathbf{S}_3^2
- Csavarmozgások: $\mathbf{S}_2^2 \cdot \mathbb{R}_2$, $\mathbf{S}_3^2 \cdot \mathbb{R}_1$

- Csavartükrözések: $\mathbf{S}_3^2 \cdot \mathbb{R}_2$

Ezen osztályozás teljességének a bizonyítása könnyen adódik, ha figyelembe vesszük a tér definícióját, továbbá, hogy $\text{Isom}(\mathbf{S}^2 \times \mathbb{R}) = \text{Isom}(\mathbf{S}^2) \times \text{Isom}(\mathbb{R})$. Az osztályozásban nincsenek átfedések, és bármely izometria benne van a táblázatban. Ha az identikus leképezést $\Sigma\Sigma = 1$ szorzatnak tekintjük, akkor az 1. és 3. típust az 5. részeként, az identitást és a 2. típust a 4. részeként tekinthetjük. Az előbbieket az irányításváltó, az utóbbiakat az irányítástartó izometriáknak.

6. A $\mathbf{H}^2 \times \mathbf{R}$ tér modellje

Modellünket a korábbi $\mathbf{E} := \mathbf{E}^3 \setminus \{0\}$ térben tekintjük. Tekintsünk most egy nyílt félkúpot, jelölje

$$C^+ := \{X(x, y, z) : x^2 + y^2 - z^2 < 0, z > 0\} := \mathbf{H}^2 \times \mathbb{R}$$

azaz a félkúp belső pontjai lesznek a tér pontjai.

Messzük el ezt a félkúpot (röviden kúpot) egy a z tengelyre merőleges síkkal, így a \mathbf{H}^2 -sík Cayley-Klein körmodelljét (C-K modell) kapjuk. Az így kapott hiperbolikus sík minden egyes pontja egy-egy \circ -pontból „kinövő”, fibrum dőféspontja lesz. A tér tehát (X, y) pontpárok halmaza lesz, ahol X a kitüntetett hiperbolikus sík pontja, $y \in \mathbf{R}$. Ezek után tekintsük a következőket:

Vegyünk egy fent definiált tetszőleges $z = k$ síkmetszetet, és feleltessük meg a pontjait egy a síkot $(0, 0, k)$ pontjában érintő $x^2 + y^2 - z^2 = -k^2$ egyenletű kétköpenyű hiperboloid pontjainak. Az \circ pontból kinövő fibrum félegyenesek a kijelölt \mathbf{H}^2 -síkot metszik, és egyértelműen leképezik az érintő félhiperboloidra (röviden hiperboloidra). A hiperboloid végtelen távoli pontjai megfelelnek a hiperbolikus sík végtelen távoli pontjainak, egyben a kúpalkotók, mint félegyenesek ideális pontjainak.

2.ábra

A tér izometriái, hasonlóan $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$ -hez, definíció szerint legyenek:

$$\text{Isom}(\mathbf{H}^2 \times \mathbb{R}) := \text{Isom}(\mathbf{H}^2) \times \text{Isom}(\mathbb{R}).$$

Természetesen ezek az izometriák fibrumtartóak lesznek.

7. $\text{Isom}(\mathbf{H}^2)$

Tekintsük tehát \mathbf{H}^2 izometriáit, mint $\text{Isom}(\mathbf{H}^2) \times \text{Id } \mathbf{R}$ elemeit:

A hiperbolikus sík mozgásai a C-K modellben azok a projektív kollineációk, melyek előállnak két egyenestükrözés kompozíciójaként. Egyenestükrözésen a C-K modell C -centrumú ($C \notin \mathbf{H}^2$) t tengelyegyenesű, t a C -centrumnak az adott körre vonatkozó polárisa, centrális axiális kollineációját értem. A $t_1 t_2$ tükrözésszorzatra, mint mozgásra három esetet különböztetünk meg (3.ábra):

- A t_1 és a t_2 tengelyek metszők, ekkor a szorzat transzformációnak fixpontja és modellen kívüli fixegyese lesz. Ezek a hagyományos forgatások.

- A t_1 és a t_2 tengelyek „párhuzamosak”, a modell határán metszik egymást.
- A t_1 és a t_2 tengelyeknek létezik közös merőlegesük, ekkor a közös merőleges fix-egyenes lesz.

Nézzük most hogyan fog kinézni egy ilyen tükrözés 3-dimenzióban a $\mathbf{H}^2 \times \mathbb{R}$ tér fenti modelljében (2. ábra, a koordináta-rendszerhez csatolt Monge-ábrázolással készült): Vegyük a tér fent bemutatott modelljét, egy \mathbf{H}^2 síkmetszetet, a neki megfeleltetett hiperboloidot, valamint vegyünk fel a síkon egy t -tengelyegyeneset, és ennek C pólusát a modellen kívül. A t tengelyegyenes két végpontját (melyek nem tartoznak a hiperbolikus síkhoz) kössük össze az \circ ponttal, így megkapjuk a tengelysík-háromszöget. Továbbá vegyük az $\circ C$ félegyenes C^∞ ideális pontját. A C-K modellben (első kép a $\mathbf{z} = k$ síkban) a t centrális axiális kollineáció szerkesztését az AA^t segédpontpár határozza meg. Az ábrán láthatóan kapjuk egy tetszőleges P pont P^t képét. Ezt a C-K modellbeli képet az \circ kezdőpontból egy ω -val jelölt vetítéssel felvetítjük az $x^2 + y^2 - z^2 = -k^2$ egyenletű hiperboloidra. A C centrumnak az $\circ C$ félegyenes C^∞ ideális pontja felel meg. Az $(\circ t)$ sík a hiperboloidból egy ϑ hiperbolát metsz ki. A P, P^t, Q, Q^t, \dots pontok képei a hiperboloidon legyenek $P^\omega, P^{t\omega}, Q^\omega, Q^{t\omega}, \dots$. Kiderül, hogy tetszőleges P pontra a $P^\omega \mapsto P, P \mapsto P^t, P^t \mapsto P^{t\omega}$ hozzárendelés egy térbeli θ centrális planáris kollineációval származtatható, melynek C^∞ a centruma, $(\circ t)$ a tengelysíkja, a hiperboloid önmagára képződik, úgy, hogy a ϑ hiperbola pontjai fixpontok. Tehát a C-K modell t tükrözésének a hiperboloid ϑ tükrözése felel meg, mely a θ leképezés hiperboloidra történő megszorítása. Ezt írhatjuk:

$$\vartheta := t^\omega := \omega^{-1}t\omega$$

konjugálás alakjába is. Ez tetszőleges k -ra igaz. θ hatása így áll elő az összes ϑ_k hatásból.

Tekinthetjük tehát $\text{Isom}(\mathbf{H}^2)$ -t az \mathbf{E} projektív modellben, mint $\text{Isom}(\mathbf{H}^2) \times \text{Id } \mathbb{R}$ elemeit. Ezen elemeket 6 osztályba soroljuk a tükrözések számától, illetve a tükörtengelyek elhelyezkedésétől függően:

- $\text{Id } \mathbf{H}^2$: Identitás
- \mathbf{H}_1^2 : Tükrözések
- \mathbf{H}_2^2 mozgások:
 1. \mathbf{H}_{2f}^2 : Forgatások
 2. \mathbf{H}_{2p}^2 : Paraciklus menti eltolások (paramozgás)
 3. \mathbf{H}_{2h}^2 : Hiperciklus menti eltolások (hipermozgás)
- \mathbf{H}_3^2 : Eltolástükrözések

Az izometriák osztályozása azon múlik, hogy a hiperbolikus síkban is két tükrözés szorzata helyettesíthető másik kettővel, úgy, hogy egyikük egyenese tetszőleges adott pontra illeszkedjék.

8. $\text{Isom}(\mathbf{R})$

Nézzük most $\text{Id } \mathbf{H}^2 \times \text{Isom}(\mathbb{R})$ elemeit:

8.1. Eltolás:

A $\mathbf{H}^2 \times \mathbb{R}$ tér fent bemutatott modelljének \circ centrumú, λ arányú ($0 < \lambda \in \mathbb{R}$) nyújtása, tehát $\tau(t)$:

$\mathbf{H}^2 \times \mathbb{R} \mapsto \mathbf{H}^2 \times \mathbb{R}$, $(X, y) \mapsto (X, y + t)$ értelmezi a tér eltolását, ahol $t = \log \lambda$ szerint képezzük \mathbb{R}^+ multiplikatív csoportját az \mathbb{R} additív csoportjára.

8.2. Tükrözések:

$\mathbf{S}^2 \times \mathbb{R}$ -hez hasonlóan ismét az inverzió visz célhoz, mely pontonként fixen tartja a $z = k$ \mathbf{H}^2 -síknak megfeleltett hiperboloidot,

$$\sigma : (x, y, z) \mapsto \left(\frac{-k^2 x}{x^2 + y^2 - z^2}, \frac{-k^2 y}{x^2 + y^2 - z^2}, \frac{-k^2 z}{x^2 + y^2 - z^2} \right) =: (x^\sigma, y^\sigma, z^\sigma),$$

de minden egyes \mathbb{R} fibrumot megfordít.

Két inverzió szorzata:

$$\sigma_1 : (x, y, z) \mapsto \left(\frac{-k^2 x}{x^2 + y^2 - z^2}, \frac{-k^2 y}{x^2 + y^2 - z^2}, \frac{-k^2 z}{x^2 + y^2 - z^2} \right) =: (x^{\sigma_1}, y^{\sigma_1}, z^{\sigma_1})$$

és

$$\sigma_2 : (x^{\sigma_1}, y^{\sigma_1}, z^{\sigma_1}) \mapsto (x^{\sigma_1 \sigma_2}, y^{\sigma_1 \sigma_2}, z^{\sigma_1 \sigma_2}) =$$

$$\begin{aligned}
x^{\sigma_1\sigma_2} &= \frac{-K^2 \left(\frac{-k^2 x}{x^2+y^2-z^2} \right)}{\left(\frac{x^2 k^4}{(x^2+y^2-z^2)^2} \right) + \left(\frac{y^2 k^4}{(x^2+y^2-z^2)^2} \right) - \left(\frac{z^2 k^4}{(x^2+y^2-z^2)^2} \right)} \\
y^{\sigma_1\sigma_2} &= \frac{-K^2 \left(\frac{-k^2 y}{x^2+y^2-z^2} \right)}{\left(\frac{x^2 k^4}{(x^2+y^2-z^2)^2} \right) + \left(\frac{y^2 k^4}{(x^2+y^2-z^2)^2} \right) - \left(\frac{z^2 k^4}{(x^2+y^2-z^2)^2} \right)} \\
z^{\sigma_1\sigma_2} &= \frac{-K^2 \left(\frac{-k^2 z}{x^2+y^2-z^2} \right)}{\left(\frac{x^2 k^4}{(x^2+y^2-z^2)^2} \right) + \left(\frac{y^2 k^4}{(x^2+y^2-z^2)^2} \right) - \left(\frac{z^2 k^4}{(x^2+y^2-z^2)^2} \right)} \\
(x^{\sigma_1\sigma_2}, y^{\sigma_1\sigma_2}, z^{\sigma_1\sigma_2}) &= \left(\frac{K^2}{k^2} x, \frac{K^2}{k^2} y, \frac{K^2}{k^2} z \right).
\end{aligned}$$

Értelmezhetjük tehát a λ -nyújtást két inverzió szorzataként:

$$\lambda = \frac{K^2}{k^2}.$$

Tehát bármely λ -nyújtás előáll két inverzió szorzataként, sőt az egyik tetszőlegesen választható. Így mindig helyettesíthető egy λ arányú nyújtás és az $x^2 + y^2 - z^2 = -K^2$ egyenletű hiperboloidra vonatkozó Σ_2 inverzió egy $x^2 + y^2 - z^2 = -k^2$ egyenletű hiperboloidra vonatkozó Σ_1 inverzióval:

$$\Lambda\Sigma_2 = \Sigma_1\Sigma_2\Sigma_2 = \Sigma_1.$$

Tehát $\text{Isom}(\mathbb{R})$ a bemutatott modellben a következő két részhalmaz egyesítése:

- \mathbb{R}_1 inverziók: tükrözések
- \mathbb{R}_2 nyújtások: két tükrözés szorzatai.

9. $\text{Isom}(\mathbf{H}^2 \times \mathbf{R})$

	Id \mathbb{R}	\mathbb{R}_1	\mathbb{R}_2
Id \mathbf{H}^2	Id $(\mathbf{H}^2 \times \mathbb{R})$	\mathbb{R}_1	\mathbb{R}_2
\mathbf{H}_1^2	\mathbf{H}_1^2	$\mathbf{H}_1^2\mathbb{R}_1$	$\mathbf{H}_1^2\mathbb{R}_2$
\mathbf{H}_{2f}^2	\mathbf{H}_{2f}^2	$\mathbf{H}_{2f}^2\mathbb{R}_1$	$\mathbf{H}_{2f}^2\mathbb{R}_2$
\mathbf{H}_{2p}^2	\mathbf{H}_{2p}^2	$\mathbf{H}_{2p}^2\mathbb{R}_1$	$\mathbf{H}_{2p}^2\mathbb{R}_2$
\mathbf{H}_{2h}^2	\mathbf{H}_{2h}^2	$\mathbf{H}_{2h}^2\mathbb{R}_1$	$\mathbf{H}_{2h}^2\mathbb{R}_2$
\mathbf{H}_3^2	\mathbf{H}_3^2	$\mathbf{H}_3^2\mathbb{R}_1$	$\mathbf{H}_3^2\mathbb{R}_2$

Az osztályozás teljességének a bizonyítása $\mathbf{S}^2 \times \mathbb{R}$ -hez hasonlóan adódik. Irányítástartók lesznek a páros számú tükrözés kompozíciójából előálló transzformációk, irányításváltók pedig a páratlan számú tükrözés kompozíciójaként előálló transzformációk.

10. Megjegyzések

Érdekességként nézzünk néhány példát tükrözéscsoportokra és térformákra. \mathbf{S}^2 kompakt alaptartományú csoportjait \mathbb{R} -belivel kombinálva:

1. $\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ szögekkel rendelkező gömbi háromszög oldalaira való tükrözések által generált csoport $\times \mathbb{R}$ -beli két tükrözés, mint generátorok D_∞ diédercsoportja, vagy
2. $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$ szögű gömbi háromszög, mint kompakt alaptartomány tükrözéscsoportja (tetraédercsoport) $\times \mathbb{R}$ -beli két tükrözés, mint generátorok D_∞ csoportja,
3. $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$ gömbi háromszög által generált tükrözéscsoport (kockacsoport) $\times \mathbb{R}$ -beli két tükrözés D_∞ csoportja.

Nézzünk most $\mathbf{S}^2 \times \mathbb{R}$ -beli fixpontmentes transzformációk által generált térformákat:

1. $g = (\mathbf{S}_1^2 \mathbb{R}_2)$ -eltolástükrözés, $G := (g), (\mathbf{S}^2 \times \mathbb{R})/G =$ nem irányítható térforma.
2. vagy ha $g_1, g_2 \in \mathbf{S}_3^2 \mathbb{R}_1$ involutív csavartükrözések úgy, hogy $g_2 g_1, g_1 g_2 \in \mathbb{R}_2$ eltolások, tehát $G := (g_1, g_2 - 1 = g_1^2 = g_2^2)$ -egy szokásos csoportreprezántálás, akkor $(\mathbf{S}^2 \times \mathbb{R})/G$ irányítható térforma, minden pontnak lesz $\mathbf{S}^2 \times \mathbb{R}$ -beli gömbbel izometrikus környezete, és egy gömbhéj lesz a fundamentális tartomány.

$\mathbf{H}^2 \times \mathbb{R}$ -ben:

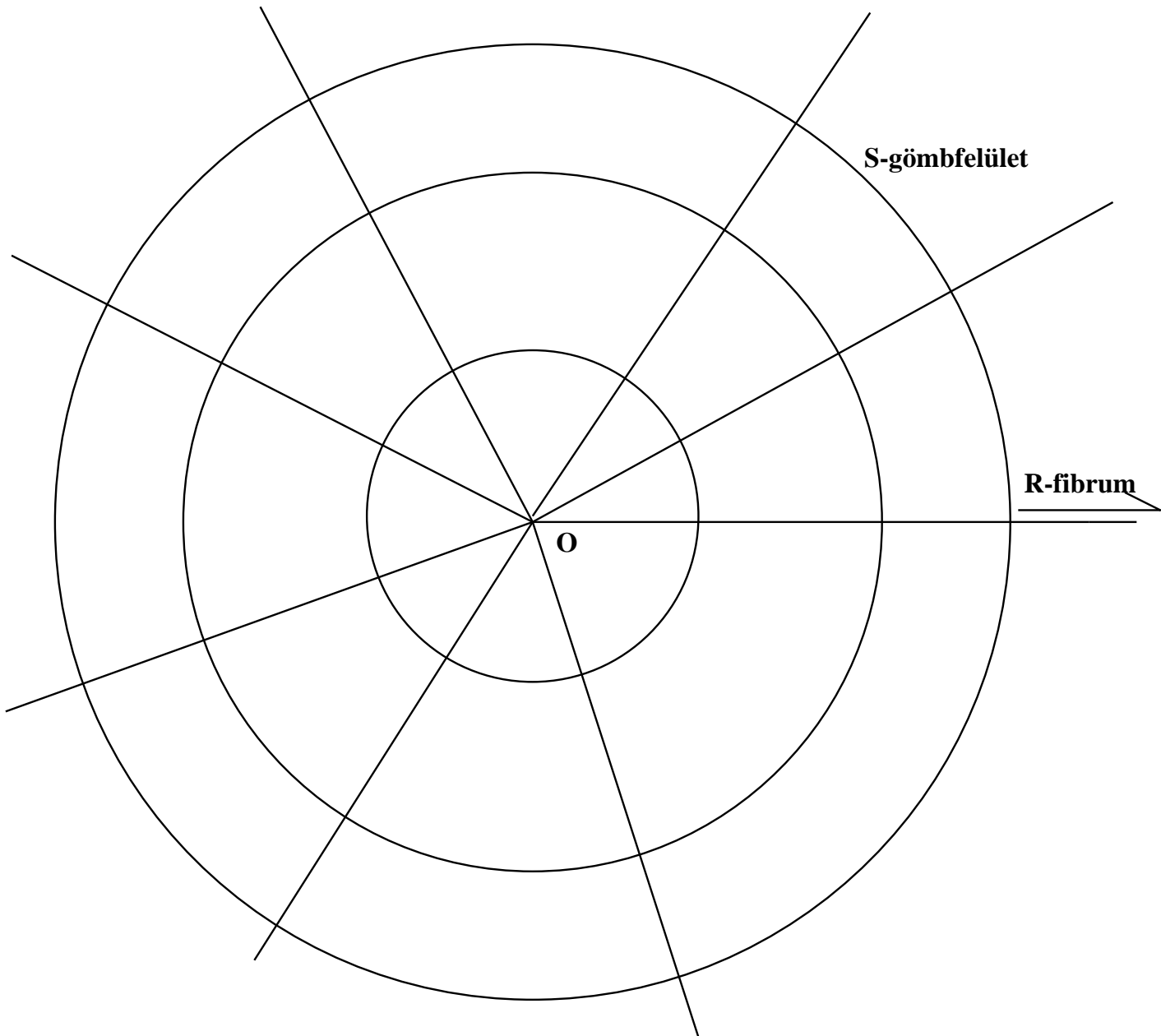
Egy $\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{r}$ szögű háromszög oldalaira való tükrözéseket ($2 \leq p \leq q \leq r, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$), továbbá \mathbb{R}_1 -beli két tükrözést véve generátornak $\mathbf{H}^2 \times \mathbb{R}$ -beli végtelen sok tükrözéscsoportot nyerünk. Az $\mathbf{S}^2 \times \mathbb{R}$ és $\mathbf{H}^2 \times \mathbb{R}$ terek kompakt alaptartományú ($\mathbf{H}^2 \times \mathbb{R}$ esetében véges térfogatú) tércsoportjainak és térformáinak osztályozása még megoldatlan probléma.

Megemlítjük, hogy az analóg problémákat az \mathbf{E}^3 euklideszi térben S.E. Fedorov, A. Schönflies (1891) oldotta meg: 219 nem izomorf tércsoportot, és ezek között 10 térformát találtak.

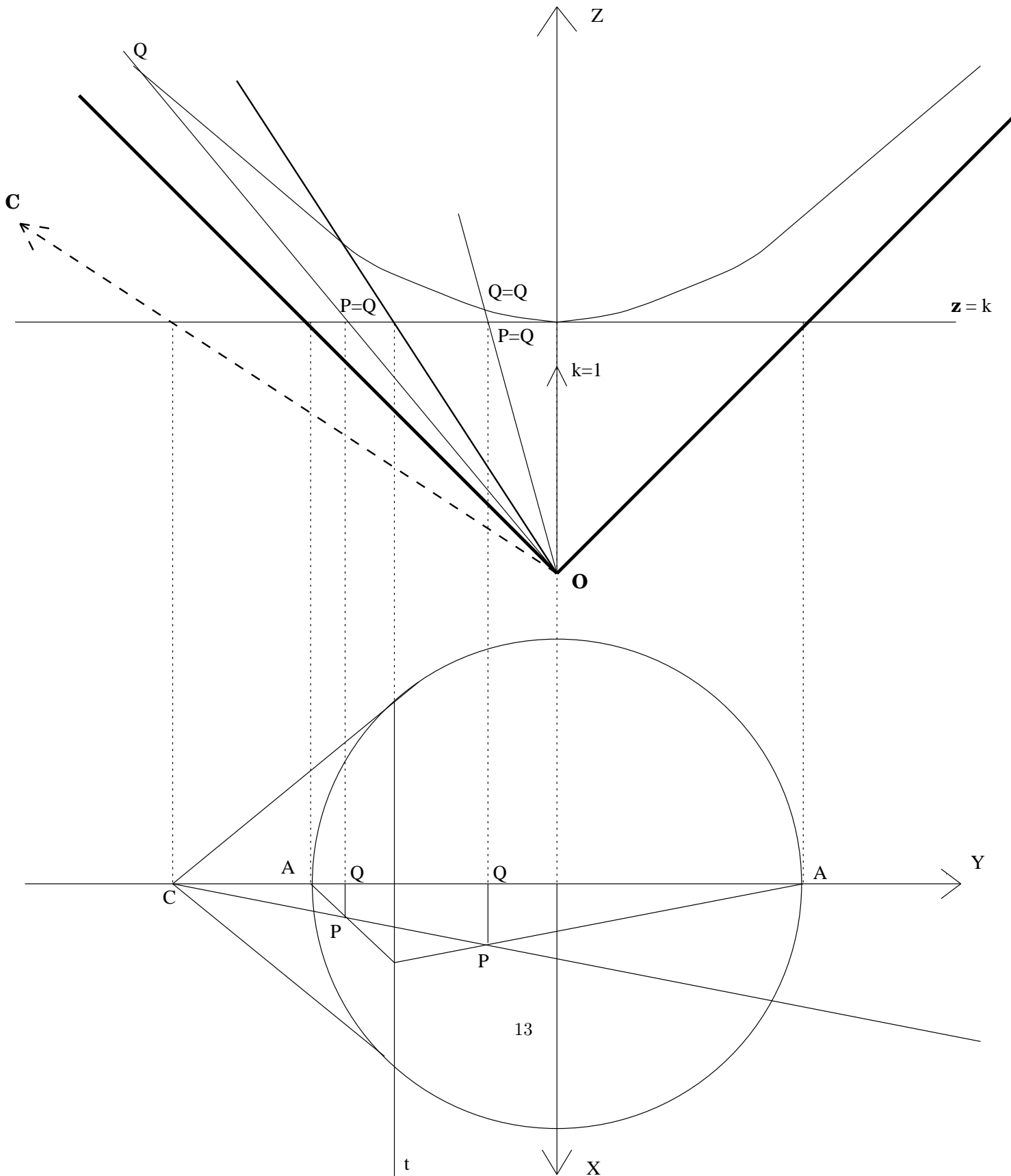
Hivatkozások

- [1] Apanasov, B.N.: *Discrete groups in space and uniformization problems*, MATH. AND ITS APPL. (Soviet Series) **40**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht-Boston-London
- [2] Bachmann, F.: *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*, DIE GRUNDLEHREN DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN Band XCVI, Springer-Verlag 1959.
- [3] Molnár, E.: The projective interpretation of the eight 3-dimensional homogeneous geometries. *Beiträge zur Algebra und Geometrie*, Vol.38 (1997), No.2. 261-288.
- [4] Scott, P.: The geometries of 3-manifolds. *Bull. London Math. Soc.* 15 (1983), 401-487.
- [5] Thurston, W. P.: Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry. *Bull. Amer. Math. Soc.* 6 (1982), 357-381.

11. **Ábrák:**

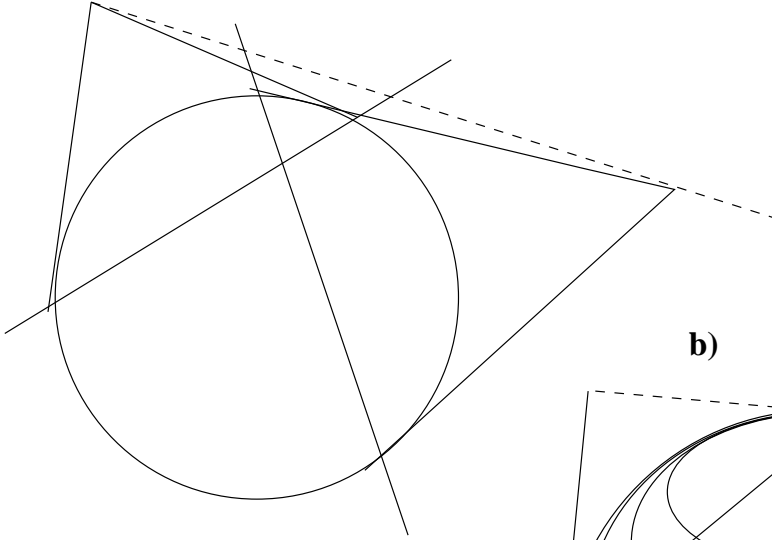


1.ábra

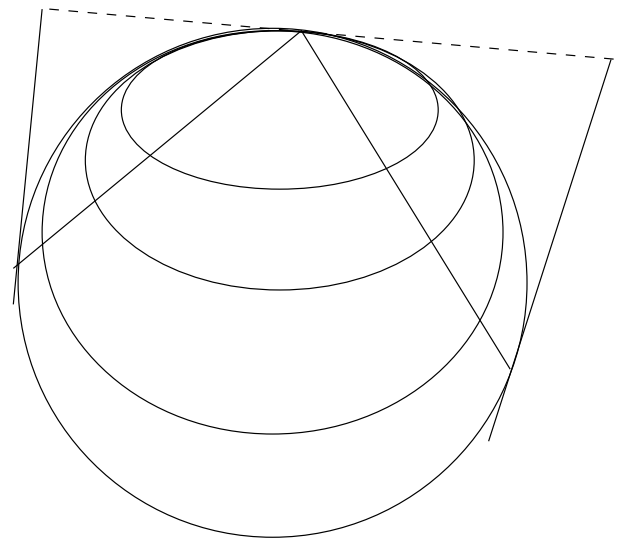


2.ábra

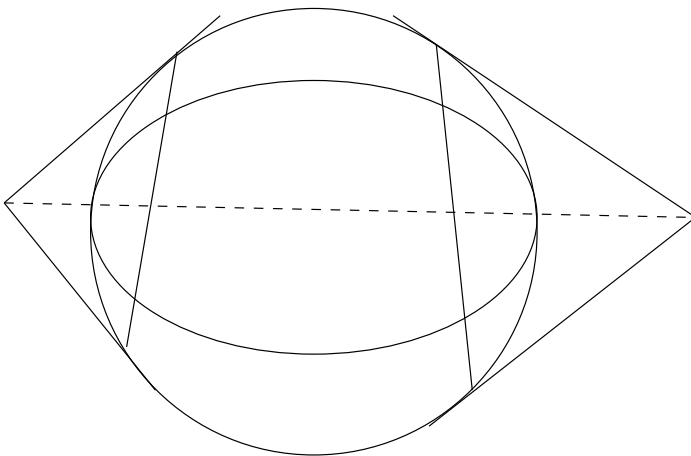
a)



b)



c)



3.ábra