

Kristálycsoportok homogén geometriákban

Farkas József Zoltán
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Természettudományi Kar
IV. évf. alkalmazott matematikus

Témavezető: Dr. Molnár Emil egyetemi tanár
TDK dolgozat
2000

Kivonat

A két illetve három dimenziós euklideszi tér kristálycsoportjai osztályozásának a kérdése, részben a gyakorlati alkalmazásoktól motiválva, lényegében a XIX. század végére megoldódott. A klasszikus - állandó görbületű - két dimenziós geometriákban a probléma teljes megoldására 1967-ig kellett várni [9]. Az utóbbi évtizedek egyik centrális matematikai eredménye a három dimenziós egyszeresen összefüggő tér homogén maximális Riemann geometriáinak az osztályozása, modellezése, leírása [10],[11],[12],[13]. A három állandó görbületű téren, vagyis az \mathbf{E}^3 euklideszi, \mathbf{S}^3 szférikus és \mathbf{H}^3 hiperbolikus téren kívül további öt nem ekviviáns metrikus geometria létezik, amelyekben a tércsoportok osztályozása, így a felmerülő fogalmak tárgyalása fontos és általánosan máig meg nem oldott kérdés. Ebben a dolgozatban elsősorban a $\mathbf{H}^2 \times \mathbf{R}$, a korábban már általam osztályozott $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$ [6], és a nem maximális, de a kristálygeometriában jelentőséggel bíró $\mathbf{E}^2 \times \mathbf{R}$ szorzatterekkel foglalkozunk. Vizsgáljuk az [5], ill. [6]-ban az $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$ -beli tércsoportok osztályozására kifejlesztett és használt módszer a $\mathbf{H}^2 \times \mathbf{R}$ ($\mathbf{E}^2 \times \mathbf{R}$) térre való kiterjesztésének lehetőségeit és nehézségeit. Hangsúlyozzuk továbbá a jelentős hasonlóságokat, és a meglévő különbségeket, melyeket részben az algebra és a geometria klasszikus kölcsönhatása motivál [3],[9].

1. Bevezetés

A klasszikus euklideszi, hiperbolikus és szférikus síkgeometriák - \mathbf{E}^2 , \mathbf{H}^2 , \mathbf{S}^2 - kristálycsoportjai egységes osztályozását A.M. Macbeath 1967-69-es cikkeivel fejezte be [9]. Lényegében a már Poincaré által is ismert Fuchs csoportok ún. F-szignatúrájából és prezentálásából kiindulva, a hiperbolikus síkcsoportok teljes algebrai osztályozását megoldva, az irányításváltó transzformációkat tartalmazó csoportokat is jellemző egységes szignatúrát és prezentálást vezetett be.

A szignatúra:

$$(\pm, g; [m_1, m_2, \dots, m_r] \{(n_{11}, \dots, n_{1s_1}), \dots, (n_{k1}, \dots, n_{ks_k})\}) \quad (1.1)$$

a Π/Γ faktor struktúrát, azaz a Π sík Γ -pályáinak halmazát, mint kompakt felületet jellemzi, ahol Π egy egyszeresen összefüggő állandó görbületű sík (a továbbiakban is $\Pi : \mathbf{E}^2, \mathbf{H}^2, \mathbf{S}^2$), Γ pedig a sík izometriáinak egy kompakt alaptartományú csoportja.

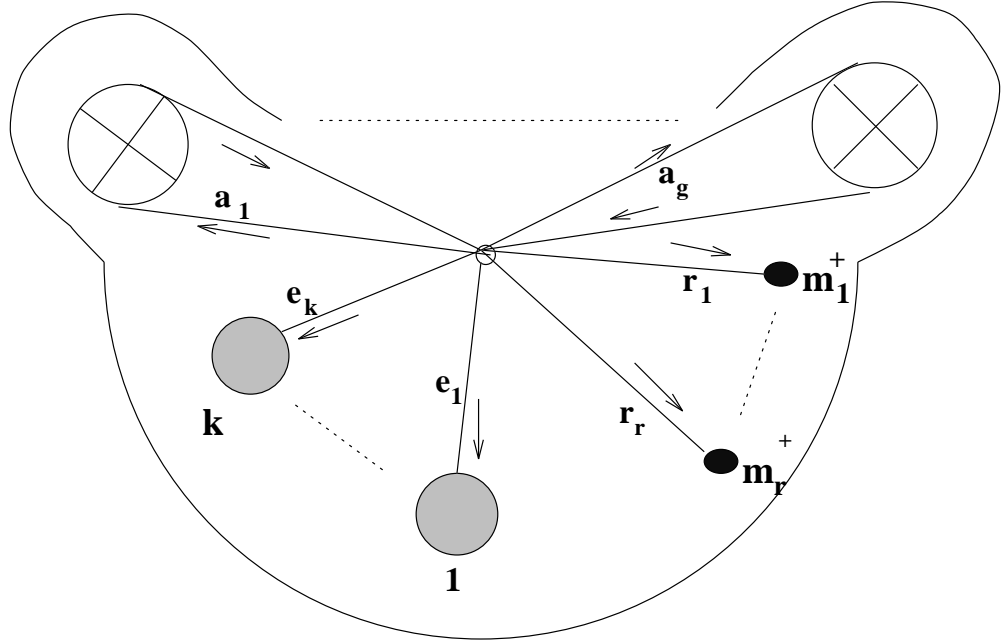
A \pm a felület irányíthatóságára, g a nemszámra utal, $[\]$ -ből a felület ún. szinguláris pontjainál fellépő ciklikus csoportok, e pontok stabilizátor részcsoportjainak rendjei, $\{ \}$ -ből a peremkomponensek és az ezekben fellépő diédercentrumok rendjei olvashatók le. Ehhez kapcsolódva Macbeath bevezette a Γ csoportok egy standard alaptartományát és ehhez a Γ (általában redundáns) prezentálását a következő „geometriai generátorokkal” és relációkkal:

$$\begin{aligned} & (r_1, \dots, r_r; c_{10}, \dots, c_{1s_1}; \dots; c_{k0}, \dots, c_{ks_k}; e_1, \dots, e_k; a_1, b_1, \dots, a_g, b_g; - \\ & - r_1^{m_1}, \dots, r_r^{m_r}; \dots, c_{is_i} e_i^{-1} c_{i0} e_i, \dots; \dots, c_{i,j-1}^2, c_{i,j}^2, (c_{i,j-1} c_{ij})^{n_{ij}}, \dots; \\ & \quad (i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, s_i); \\ & \quad r_1 \dots r_r e_1 \dots e_k a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}) \end{aligned} \quad (1.2)$$

irányítható esetben; illetve az a_i, b_i eltolás generátorok helyett az a_1, \dots, a_g eltolástükrözésekkel generálva az utolsó reláció helyett az:

$$r_1 \dots r_r e_1 \dots e_k a_1^2 \dots a_g^2$$

relációval, ha a Π/Γ felület nem irányítható [9].



1.ábra A Π/Γ nemirányítható faktorfelület szimbolikus prezentálása. A középen ábrázolt kezdőpontból kiinduló élek mentén ollóval felvágva kapjuk az \mathcal{F}_Γ alaptartományt. Az élek hozzák létre az oldalpárokat, a peremkomponensek pedig a tüköroldalakat.

Ez a prezentálás egy kompakt alaptartományhoz tartozik, melyet \mathcal{F}_Γ -val jelölünk. Ezen alappoligon bizonyos élpárjai homeomorfizmusokkal képződnek egymásra, így áll elő a $\Pi/\Gamma =: \bar{\mathcal{F}}_\Gamma$ felület. (1.ábra)

A lehetséges alaptartományok kombinatorikus ekvivalencia erejéig történő osztályozásában [8], illetve a síksoportok Macbeath-féle szignatúrája alapján történő relizálásában fontos szerepet játszik az alaptartomány kombinatorikus (terület)mértékének képlete:

$$T\kappa = \pi \left\{ \sum_{l=1}^r \left(\frac{2}{m_l} - 2 \right) + \sum_{i=1}^k \left(-2 + \sum_{j=s_1}^{s_i} \left(-1 + \frac{1}{n_{ij}} \right) \right) + 2\chi \right\} \quad (1.3)$$

mely az $\bar{\mathcal{F}}_\Gamma$ szögösszegének és a megfelelő euklideszi szögösszegnek a különbsége; ahol κ a realizáló sík Gauss görbülete, $\chi = 2 - \alpha g$ a felület Euler karakterisztikája, ahol $\alpha = 1$ nem irányítható esetben, $\alpha = 2$ irányítható esetben. Az euklideszi esetben $\kappa = 0$, és a hasonlóság miatt a T terület bármekkora lehet.

2. Homogén geometriák, izometriák

A 8 homogén maximális Thurston-féle geometria: \mathbf{E}^3 , \mathbf{S}^3 , \mathbf{H}^3 , $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$, $\mathbf{H}^2 \times \mathbf{R}$, $\widetilde{\mathbf{SL}}_2\mathbf{R}$, \mathbf{Nil} , \mathbf{Sol} közül kettő direkt szorzat alakú fibrált tér, tehát a tér pontjai az (X, x) alakú párok halmaza, ahol $X \in \Pi$ alapsík, $x \in \mathbf{R}$ fibrum (vagy szál). Ugyanilyen struktúrájú az $\mathbf{E}^2 \times \mathbf{R}$

tér, amely ugyan nem maximális geometria (ugyanis \mathbf{E}^3 gazdagabb izometriacsoporttal rendelkezik), de az analógiák és a kristálytani alkalmazások szempontjából jelentőséggel bír (2.ábra).

Itt nem indokoljuk azt az alaptételt, miszerint a $\Pi \times \mathbf{R}$ alakú terek izometriái természetesen állnak elő a következő alakban:

$$Isom(\Pi \times \mathbf{R}) = Isom(\Pi) \times Isom(\mathbf{R}), \quad (2.1)$$

igy nyilván minden izometria fibrumtartó lesz, most speciálisan az \mathbf{R} -komponensek \mathbf{R} -komponensekre képződnek.

Ezen izometriák Π -n ható részét B -vel, a transzformáció \mathbf{R} -en ható részét (b, τ) -val jelöljük, ahol tehát $B \in Isom(\Pi)$, $b = \pm 1$ az \mathbf{R} identikus leképezése : $1 =: 1_{\mathbf{R}} : (X, x) \mapsto (X, x)$ vagy \mathbf{R} -beli ponttükrözés : $-1 =: \bar{1}_{\mathbf{R}} : (X, x) \mapsto (X, -x)$, illetve $\tau : (X, x) \mapsto (X, x + \tau)$ eltolás az \mathbf{R} -fibrumok mentén. A transzformációk szorzási szabálya a következő:

$$(B_1 \times b_1, \tau_1) \circ (B_2 \times b_2, \tau_2) = (B_1 B_2 \times b_1 b_2, \tau_1 b_2 + \tau_2) \quad (2.2)$$

melyet a

$$B \times (b, \tau) \sim (B \times b, \tau) : (X, x) \mapsto (XB, xb + \tau) \quad (2.3)$$

hatásból származtathatunk. Itt és a továbbiakban is a leképezések a tér pontjain jobbról hatnak.

A három klasszikus geometria egybevágóságaihoz hasonlóan ezen terek minden izometriája is természetesen áll elő tükrözések szorzataként. A Π alapsíkban (vagy bázisban) bármely egybevágóság három egyenestükrözés szorzataként előáll, az \mathbf{R} -fibrumban legfeljebb két ponttükrözés szükséges, így $\Pi \times \mathbf{R}$ -ben legfeljebb 5 siktükrözés elegendő, és nyilván ennél kevesebb nem elég [4].

Ezen izometriák halmazát jelölje $\Pi_i \mathbf{R}_j$, $i = 0, 1, 2, 3$ $j = 0, 1, 2$, lásd [4]-ben.

Megjegyzések Ilyen klasszikus előállítás az $\widetilde{\mathbf{SL}}_2 \mathbf{R}$ és \mathbf{Nil} geometriákban nem lesz lehetséges, ugyanis ott - a definícióból adódóan [13] - minden izometria irányítástartó, megőrizve az alapsík feletti fibrálást. Mégpedig $\widetilde{\mathbf{SL}}_2 \mathbf{R}$ a \mathbf{H}^2 hiperbolikus sík pontjai feletti \mathbf{R} -fibrumokból, \mathbf{Nil} pedig az \mathbf{E}^2 euklideszi sík pontjai feletti \mathbf{R} -fibrumokból áll a direkt szorzattól eltérő „csavart” módon [10],[11],[12],[13]. Megjegyezzük, hogy mind a 8 homogén geometriában a leképezések irányítástartását általánosan a transzformáció Jacobi determinánsának pozitív előjelével értelmezhetjük.

Fontos viszont kiemelnünk, hogy ha $\gamma \in Isom(\widetilde{\mathbf{SL}}_2 \mathbf{R})$ akkor a $p(\gamma)$ lehet irányításváltó transzformáció, pl. egyenestükrözés \mathbf{H}^2 -ben, ahol

$$p : Isom(\widetilde{\mathbf{SL}}_2 \mathbf{R}) \mapsto Isom(\mathbf{H}^2) \quad (2.4)$$

a fibrumok szerinti vetítéssel értelmezett természetes projekció. Definíció szerint tehát a p projekció megtartja a megfelelő csoportok kompozíció műveletét, vagyis homomorfizmus. Itt az \mathbf{R} -fibrumok menti szimultán eltolások, melyekhez a \mathbf{H}^2 identikus leképezése tartozik, alkotják a homomorfizmus \mathbf{R} -rel izomorf magját. Ezt fejezi ki az alábbi ún. egzakt sorozat.

$$0 \rightarrow \mathbf{R} \rightarrow Isom(\widetilde{\mathbf{SL}}_2 \mathbf{R}) \rightarrow Isom(\mathbf{H}^2) \rightarrow 1, \quad (2.5)$$

tehát minden $\text{Isom}(\mathbf{H}^2)$ -beli elem előáll képként. Lásd részletesen [11]-ben.

Ha tehát Γ az $\widetilde{\text{SL}}_2\mathbf{R}$ (vagy \mathbf{Nil}) tércsoportja, akkor $p(\Gamma)$ \mathbf{H}^2 -beli (vagy \mathbf{E}^2 -beli) síkcsoport. Természetesen vetődik fel a kérdés, hogy minden \mathbf{H}^2 -beli (\mathbf{E}^2 -beli) síkcsoport előáll-e így, és milyen módon? De ebben a dolgozatban ezzel nem foglalkozunk.

3. Fogalmak, definíciók, összefüggések

A három dimenziós euklideszi térben a kristálycsoportok osztályozása, mint már említettük, lényegében a XIX. század végére megoldódott. Az analóg probléma napjainkra 4 illetve 5 és 6 dimenzióra is megoldottnak tekinthető, és a módszerek - részben az általános eredmények miatt - elvileg magasabb dimenziókra is kivitelezhetőek. Itt a tércsoport vagy kristálycsoport ma már klasszikusnak tekinthető definíciója a következő:

Definíció 3.1 Az \mathbf{E}^n tér Γ tércsoportja a tér izometriáinak egy csoportja, mely csoport elemeivel egy megfelelő kompakt alaptartományra hatva a tér hézagmentes, átfedés nélküli kővezését nyerjük. \square

Már most utalunk rá, hogy itt lényegében az alaphalmazra vonatkozó megkötések jelentik az egyedüli korlátozásokat (vesd össze 3.9-el).

Természetesen értelmezhető ezután a Γ csoport Γ_0 pontcsoportja, nevezetesen

Definíció 3.2 Az \mathbf{E}^n tér Γ tércsoportjának Γ_0 pontcsoportja a Γ -ban szereplő transzformációk lineáris részeinek csoportja. \square

Megjegyezzük, hogy ez a Γ_0 csoport nem (feltétlenül) része a Γ tércsoportnak.

Mint kiderült, az alaptartomány (tartomány - tartalmaz belső pontot) korlátossága \mathbf{E}^n -ben biztosítja a Γ_0 végességét, és egy n -dimenziós L_Γ rács létezését.

Ezen klasszikus definíciók és eredmények motiválják elsősorban a későbbi fogalomalkotásainkat.

Ehhez a 2 fejezetben szereplő $\{B\}$ -t a Π alapsíkon ható transzformációk halmazának elemeit \mathbf{E}^2 esetén tovább bontjuk, és a $B := (B_l, B_t)$ alakba írjuk, ahol B_l a B transzformáció lineáris része, B_t -vel pedig a B ún. eltolási részét jelöljük.

Megjegyezzük, hogy az \mathbf{S}^2 , \mathbf{H}^2 síkok esetében $\{B\} = \{B_l\}$ mindig fennáll [4],[10], elmentésben \mathbf{E}^2 -vel.

Ekkor tehát a $\Pi \times \mathbf{R}$ transzformációi a következő alakba írhatók

$$B \times (b, \tau) \sim (B_l, B_t) \times (b, \tau) \sim (\{B_l \times b\}, \{B_t, \tau\}) \quad (3.1)$$

Ezután a következő definíciót adjuk:

Definíció 3.3 A (3.1) szerinti $\{B_l \times b\}$ halmazt a $\Pi \times \mathbf{R}$ tér Γ csoportjához tartozó lineáris részek csoportjának nevezzük és Γ_0 -al jelöljük. \square

Ha most az \mathbf{E}^n -ben adott 3.1 és 3.2 definíciókat tekintenénk a $\Pi \times \mathbf{R}$ térbeli megfelelő csoportok definíciójának, akkor láthatjuk, hogy ezen definíciók szerint $\mathbf{E}^2 \times \mathbf{R}$ -ben a Γ tércsoportok Γ_0 pontcsoportjainak a végessége természetesen adódik, nevezetesen a Schönflies-Bieberbach tétel garantálja. $\mathbf{H}^2 \times \mathbf{R}$ -ben ez nyilván nem teljesülhet, mivel $\forall I \in \text{Isom}(\mathbf{H}^2) \cap \Gamma$ -ra $I \in \Gamma_0$ teljesül a 3.2 definíció értelmében. De mint látni fogjuk 3.10-ben, $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$ -ben sem következik az alaptartomány kompaktságából a Γ_0 végessége. Emiatt további feltétellel bővítjük az \mathbf{E}^n -beli tércsoportok 3.1-es definícióját, így jutva el a $\Pi \times \mathbf{R}$ -beli tércsoportok definíciójához. Nevezetesen megköveteljük egy $L_\Gamma^{\mathbf{R}}$ -el jelölt

\mathbf{R} -irányú (egy dimenziós) rács létezését.

Definíció 3.4

$$L_{\Gamma}^{\mathbf{R}}(\tau) := \{k\tau : (X, x) \mapsto (X, x + k\tau) \forall X \in \Pi; \forall x \in \mathbf{R} \mid k \in \mathbf{Z}\}, \quad (3.2)$$

ahol τ a legkisebb ilyen pozitív eltolás, melyet rögzítünk, lesz a $\Pi \times \mathbf{R}$ tér Γ csoportjához tartozó \mathbf{R} irányú rács értelmezése, ha létezik ilyen τ . Ha nem létezik, akkor $L_{\Gamma}^{\mathbf{R}}$ az identikus leképezésből áll. \square

Most tehát definiáljuk általánosan a $\Pi \times \mathbf{R}$ tér Γ tércsoportját a következő módon:

Definíció 3.5 A Γ csoport a $\Pi \times \mathbf{R}$ tércsoportja, ha $\forall g \in \Gamma$ -ra $g \in \text{Isom}(\Pi \times \mathbf{R})$ teljesül, valamint létezik olyan \mathcal{F}_{Γ} -val jelölt kompakt alaptartomány, amelyre Γ -val hatva a tér hézagmentes, átfedés nélküli kövezését nyerjük, úgy, hogy létezik a fenti 3.4-es definícióban szereplő $L_{\Gamma}^{\mathbf{R}} \triangleleft \Gamma$, mely egy \mathbf{R} irányú rács. \square

Továbbá megadjuk a fenti Γ tércsoport pontcsoportjának a definícióját:

Definíció 3.6 A Γ tércsoport 3.3-as definíció szerinti, lineáris részek által meghatározott Γ_0 csoportját nevezzük a Γ pontcsoportjának. \square

Fontos továbbá a Γ tércsoportban az L_{Γ} „maximális rács” fogalmának a bevezetése, amely az $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$, $\mathbf{H}^2 \times \mathbf{R}$ terekben egyenértékű lesz a 3.4-es definícióban megadott \mathbf{R} irányú $L_{\Gamma}^{\mathbf{R}}$ ráccsal, $\mathbf{E}^2 \times \mathbf{R}$ -ben viszont L_{Γ} egy 3 dimenziós rács lesz. Fontos viszont kiemelni, hogy ez az $\mathbf{E}^2 \times \mathbf{R}$ -beli „maximális rács” nem irható fel általában direkt szorzat alakban. Ugyanis az \mathbf{E}^2 -beli rácsot generáló eltolásokhoz tartozhatnak \mathbf{R} -beli eltolási részek, mivel a lehetséges (most $L_{\Gamma}^{\mathbf{R}}$ -beli) eltolási komponenseket a Π -beli síkcsoport generátor elemeihez fogjuk hozzá rendelni (Tétel 4.1, ahogy majd látni fogjuk), tehát ($\mathbf{E}^2 \times \mathbf{R}$ -ben) nem a Γ_0 pontcsoport generátoraihoz.

Állítás 3.7 A Γ_0 pontcsoport a Γ tércsoport homomorf képe, mely homomorfizmus magja a Γ_0 egységelemére képeződő Γ -beli L_{Γ} rács elemei, és így

$$\Gamma_0 \cong \Gamma/L_{\Gamma} =: \bar{\Gamma} \quad (3.3)$$

a homomorfizmus tétel szerinti izomorfizmus áll fenn. \square

Megadhatjuk tehát a Γ_0 pontcsoport egy másik a 3.6-ban megadottal ekvivalens definícióját.

Definíció 3.8 A $\Gamma/L_{\Gamma} = \bar{\Gamma}$ faktorcsoporthat a Γ csoport pontcsoportjának nevezzük, melynek elemei tehát Γ -nak az L_{Γ} invariáns kommutatív részcsoporthat szerinti mellékosztályai. Így a $\bar{\Gamma}(\cong \Gamma_0)$ reprezentáns elemei már Γ -hoz tartoznak, ezek halmazát $\bar{\Gamma}_0(\subset \Gamma)$ jelöli. Feltehetjük, hogy $\bar{\Gamma}_0$ -ban az \mathbf{R} -beli τ_i eltoláskomponenseket minimálisan választjuk: $0 \leq \tau_i < \tau$, ahol $\langle \tau \rangle =: L_{\Gamma}^{\mathbf{R}}$. \square

Most a minél általánosabb megközelítés - illetve, mint látni fogjuk a későbbi 3.10-3.11 állítások miatt - bevezetjük teljes általánosságban egy T Thurston-féle téren \mathcal{F} fundamentális halmazzal tranzitivan ható Γ csoportot.

Definíció 3.9 A Γ csoport a T (Thurston-féle) téren \mathcal{F}_{Γ} fundamentális halmazzal tranzitivan ható csoportja $\Leftrightarrow \forall g \in \Gamma$ -ra $g \in \text{Isom}(T)$ és létezik olyan $\mathcal{F}_{\Gamma} =: \mathcal{F}$ halmaz, hogy $\mathcal{F}^{\Gamma} := \{\mathcal{F}^g \mid g \in \Gamma\}$ a T tér egyrétű, átfedés nélküli kövezéséhez vezet. \square

Ez a definíció mind a 8 Thurston-féle geometria esetén egy minimális követelményt támaszt, és látjuk, hogy itt a 3.1-es definícióval ellentétben nincs kikötve pl. az \mathcal{F} -re vonatkozó semmilyen feltétel sem, így például a teljes izometriacsoporthat is - a tér egyetlen pontjával, mint alaphalmazzal - eleget tesz a fenti követelményeknek.

A fent megadott definíciók és fogalmak bevezetése után természetesen merül fel a feltételek közötti összefüggések tisztázásának a kérdése, melyeket $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$ -ben az alábbi állítás formájában fogalmazzunk meg.

Állítás 3.10 Ha Γ az $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$ tér fenti 3.9-es definícióban megadott csoportja, akkor az alábbi három állítás közül bármely kettőből következik a harmadik:

1. $|\Gamma_0| < \infty$, azaz a pontcsoport véges.
2. $\exists L_\Gamma^{\mathbf{R}} \triangleleft \Gamma$, tehát létezik \mathbf{R} -irányú rács Γ -ban.
3. $\exists \mathcal{F}$ korlátos, nem üres belsejű Γ -alaphalmaz $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$ -ben.

Bizonyítás: 1.+2. \Rightarrow 3.

Tekintsük az $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}/L_\Gamma^{\mathbf{R}}(\tau) := H := \mathbf{S}^2 \times [0, \tau]$, $0 < \tau \in \mathbf{R}$ gömbhéjat. Ez korlátos tartomány $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$ -ben, és feltehetjük, hogy $\mathcal{F}^e \subseteq H$ teljesül, ahol e a Γ_0 pontcsoport identitása. Szükségképpen $\mathcal{F}^{\bar{\Gamma}_0} := \{\mathcal{F}^g \mid g \in \bar{\Gamma}_0\} \subseteq H' := \mathbf{S}^2 \times [-2\tau, 2\tau]$ teljesül, ahol H' szintén korlátos, következésképpen \mathcal{F} is korlátos kell legyen. Mivel $\text{Int}(H)$ nem üres, és $|\bar{\Gamma}_0| < \infty$ ezért $\text{Int}(\mathcal{F})$ is kell tartalmazzon pontot.

2.+3. \Rightarrow 1.

Képezzük ismét az $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}/L_\Gamma^{\mathbf{R}} = H$ gömbhéjat, mely tartalmazza \mathcal{F} -et. Mivel \mathcal{F} tartalmaz belső pontot, és $\mathcal{F}^{\bar{\Gamma}_0} \subseteq H' := \mathbf{S}^2 \times [-2\tau, 2\tau]$, ezért $|\bar{\Gamma}_0| = |\Gamma_0| < \infty$ teljesül.

3.+1. \Rightarrow 2.

Mivel most a feltétel szerint \mathcal{F} korlátos és Γ_0 elemszáma véges, következésképp a csoportban szereplő elemekben az \mathbf{R} -komponensekben fellépnek \mathbf{R} -irányú eltolási részek. A Γ csoport elemeit írhatjuk a (g_i, τ_i) alakba, ahol τ_i jelöli a g_i transzformációhoz tartozó \mathbf{R} -beli eltolási részt. Így (2.2) alapján $(g_i, \tau_i)(g_j, \tau_j) = (g_i g_j, \tau_i + \tau_j)$, illetve $(g_i, \tau_i)(g_j, \tau_j) = (g_i g_j, \tau_j - \tau_i)$ teljesül, ha g_j -ben fellép az \mathbf{R} -beli ponttükrözés. Mivel most Γ_0 véges, így minden elemének rendje véges, a fenti szorzási szabály alapján a Γ_0 definiáló relációit kielégítve meghatározhatók a Γ_0 identitásához tartozó \mathbf{R} -beli eltolási részek. Ezek után τ legyen a Γ_0 identitásához tartozó legrövidebb nem zérus eltolási rész. Ezt a τ által generált $L_\Gamma^{\mathbf{R}}$ rácsot minden $g_i \in \Gamma$ elem invariánsan hagyja. ■

Állítás 3.11 A fenti 1,2,3, feltételek egyikéből sem következik a másik kettő.

Bizonyítás Példákat adunk, amelyekben a fenti 1,2,3, feltételek közül rendre egy teljesül a másik kettő viszont nem.

1. Legyen $|\Gamma_0| < \infty$ méghozzá $\Gamma_0 := C_q \triangleleft \text{Isom}(\mathbf{S}^2)$ forgatásokból álló ciklikus csoport, ekkor létezik a fenti általános definíció értelmében vett $(+, 0; [q]; \{\}) \times \mathbf{1}_{\mathbf{R}}$ típusú csoport, ahol nem létezik \mathbf{R} -irányú rács, illetve $\mathcal{F} := D \times \mathbf{R}$ nem korlátos alaptartomány lesz, ahol D legyen a gömbi pólusoknál $\frac{2\pi}{q}$ szögekkel rendelkező gömbi kétszög, mint a C_q gömbi csoport egy fundamentális tartománya.
2. Létezzen most egy $L_a = L_\Gamma^{\mathbf{R}} \triangleleft \Gamma$ rács ($0 < a \in \mathbf{R}$). Legyen gömbi földrajzi koordinátákban $\mathcal{F} := \{(\varphi, \vartheta, y) \mid \varphi \equiv \varepsilon \pmod{2\pi}, \vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], y = z\}$ fundamentális halmaz - $\text{Int}(\mathcal{F}) = \{\emptyset\}$ -; ahol ε, z rögzített értékek (ez egy gömbi főkör fele lesz az $(\cdot, z) = \mathbf{S}^2$ szinten). Legyen továbbá $\Gamma := \{P_{\bar{\varphi}, \bar{y}} : (\varphi, \vartheta, y) \mapsto (\varphi + \bar{\varphi}, \vartheta, y + \bar{y}) \mid \bar{\varphi} \in \mathbf{R} \pmod{2\pi}; \bar{y} \in \mathbf{R}\}$, azaz Γ folytonos kétparaméteres csoport ($|\Gamma_0| = \infty$). A fenti Γ tartalmazhat bármely $L_a := \{ka \mid k \in \mathbf{Z}, 0 < a \in \mathbf{R}\}$ rácsot, és $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$ -beli kitöltést kapunk a 3.9-es általános definíciónk értelmében.

Látható továbbá, hogy \mathcal{F} nem tartalmaz belső pontot, valamint mivel a Γ_0 pontcsoport a Γ azon $P_{\overline{\varphi}, \overline{y}}$ elemeiből áll, amelyekben $0 \leq \overline{y} \leq a$ teljesül, így ez is végtelen elemű lesz.

3. Legyen most \mathcal{F} korlátos $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$ -ben, nevezetesen $\mathcal{F} := \mathbf{S}^2 \times [0, a]$ ($\text{Int}(\mathcal{F}) \neq \{\emptyset\}$). A csavarmozgással generált $\Gamma := \langle \mathbf{s} \rangle$, $\mathbf{s} : (\varphi, \vartheta, y) \mapsto (\varphi + \alpha, \vartheta, y + a)$ csoport végtelen elemű lesz, ha $\frac{\alpha}{2\pi}$ irracionális szám, Γ_0 is végtelen rendű, továbbá nem létezik (triviálistól különböző) rács. ■

Megjegyzések A fentiekkel ellentétben, könnyű látni, hogy az $\mathbf{E}^2 \times \mathbf{R}$ térben a harmadik feltétel - nevezetesen az alaptartomány (mely tartalmaz belső pontot) korlátossága maga után vonja a többi feltétel teljesülését, nevezetesen a Schönflies-Bieberbach tétel biztosítja ezt.

Kiemeljük továbbá, hogy ehhez hasonlóan a $\mathbf{H}^2 \times \mathbf{R}$ térben az \mathcal{F}_Γ alaptartomány kompaktsága garantálja az $L_\Gamma^{\mathbf{R}}$ rács létezését, ugyanis:

Állítás 3.12(Thurston [13]) A $\Gamma \subseteq \text{Isom}(\mathbf{H}^2 \times \mathbf{R})$ a $\mathbf{H}^2 \times \mathbf{R}$ tér diszkrét csoportja kovéges $\iff p(\Gamma)$ diszkrét kovéges, és $|\text{Ker}(p)| = \infty$. □

Itt p a már korábban bevezetett a fibrumok szerinti vetítéssel értelmezett projekció az alapsíkra; illetve az X tér (most pl. X a nyolc homogén geometria egyike) $\Gamma \subseteq \text{Isom}(X)$ csoportjának kovégessége illetve kokompaktsága azt jelenti, hogy az X/Γ faktorhalmaz (pályatér) véges mértékű(térfogatú) illetve kompakt.

Elsőként jegyezzük meg, hogy kovéges csoportok helyett kokompakt csoportokra is igaz az állítás, hiszen a $\mathbf{H}^2 \times \mathbf{R}/\Gamma$ nem kompakt véges térfogatú, akkor és csak akkor ha a $\mathbf{H}^2/p(\Gamma)$ is ilyen tulajdonságú. (Megjegyezzük, hogy a 8 geometria közül a három hiperbolikus geometriában : \mathbf{H}^3 , $\mathbf{H}^2 \times \mathbf{R}$, $\widetilde{\text{SL}}_2\mathbf{R}$ léteznek csak kovéges de nem kokompakt csoportok.) Vegyük észre továbbá, hogy a Γ diszkrétsége és kokompaktsága ekvivalens az \mathcal{F}_Γ kompakt alaptartomány létezésével. Valamint, hogy a $|\text{Ker}(p)| = \infty$ feltétel egyenértékű az $L_\Gamma^{\mathbf{R}}$ rács létezésével.

Összegzésként tehát elmondhatjuk, hogy a 3.5-ös definícióban megkívánt $L_\Gamma^{\mathbf{R}}$ rács létezése csak az $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$ térben jelent valódi többletfeltételt.

4. A tércsoportok osztályozásának stratégiája

Az $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$ térben használt módszer analógiájára először bebizonyítjuk a következő általánosabb tételt.

Tétel 4.1($\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$, $\mathbf{H}^2 \times \mathbf{R}$, $\mathbf{E}^2 \times \mathbf{R}$) Ha Γ a fenti 3.5-ös definíció értelmében vett tércsoport az előbbi $\Pi \times \mathbf{R}$ Thurston terekben, akkor $\Gamma/L_\Gamma^{\mathbf{R}}$ az alábbi három típus (osztály) valamelyikébe sorolható:

- I. Típus $G \times 1_{\mathbf{R}}$
- II. Típus $G \times \overline{1}_{\mathbf{R}}$
- III. Típus $G'G := (G \times 1_{\mathbf{R}}) \cup ((G' \setminus G) \times \overline{1}_{\mathbf{R}}]$, ahol G 2-indexű részcsoporthoz tartozó G' -ben.

Most is $G := (\pm, g; [m_1, m_2, \dots, m_r]\{(n_{11}, \dots, n_{1s_1}), \dots, (n_{k1}, \dots, n_{ks_k})\})$

Π -beli kompakt alaptartományú csoport (1.2) szerint.

Bizonyítás: Képezzük először a $\Gamma/L_{\Gamma}^{\mathbf{R}}$ \mathbf{R} -komponensét a $\Gamma_0^{\mathbf{R}}$ véges csoportot.

Ekkor $\Gamma_0^{\mathbf{R}} \cong \langle 1_{\mathbf{R}} \rangle$ vagy $\Gamma_0^{\mathbf{R}} \cong \langle \bar{1}_{\mathbf{R}} \rangle$ teljesül. Ezek után három eset lehetséges: ha $\Gamma_0^{\mathbf{R}} \cong \langle 1_{\mathbf{R}} \rangle$ teljesül, akkor nyilván $\Gamma/L_{\Gamma}^{\mathbf{R}} \in \text{I}$ típus. Ha $\Gamma_0^{\mathbf{R}} \cong \langle \bar{1}_{\mathbf{R}} \rangle$ 2 elemű csoport, azaz $\bar{1}_{\mathbf{R}}$ is fellép, akkor mivel $\bar{1}_{\mathbf{R}}$ kommutál bármely Π -beli transzformációval, így a $\Gamma/L_{\Gamma}^{\mathbf{R}}$ $1_{\mathbf{R}}$ -komponensű elemei 2 indexű normális részcsoporthoz tartoznak, ezért $\Gamma/L_{\Gamma}^{\mathbf{R}} \in \text{II}$ Típus vagy III Típus; és több lehetőség nincsen. ■

A fenti tétel megadja tehát számunkra az osztályozás stratégiáját, ahogy azt már $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$ -ben láttuk: a Π -beli csoportok szignatúrája szerint haladva vizsgáljuk meg sorban az I-III típusoknál adódó szóba jövő megoldásokat. Az I-II típusnál majd a Γ prezentálása természetesen adódik (1.2) alapján. A III típusú csoportok meghatározása az $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$ térben - a csoportosztályok végessége illetve a csoportok végessége miatt - viszonylag könnyen adódott. Ehhez (általában $\Pi \times \mathbf{R}$ -ben) szükséges feltétel, hogy a kisebbik csoport alaptartományának a kombinatorikus mértéke kétszerese legyen a nagyobbik csoporténak.

A probléma megoldásának kulcsát az $\mathbf{E}^2 \times \mathbf{R}$ térben, tehát a megfelelő csoportpárok kiválasztását megtalálhatjuk [3] XIII.táblázatában. A $\mathbf{H}^2 \times \mathbf{R}$ térben a III. típusú tércsoportok meghatározása viszont igen nehéz problémát vet fel, nevezetesen a lehetséges $G'G$ párok megadásának kérdését. A probléma tehát adott szignatúrához a csoport 2-indexű részcsoporthoz tartozásának meghatározása. Az egzisztencia kérdése eldönthető a kommutátor faktorcsoporthoz tartozásának meghatározásával, amelyet például a GAP programcsomaggal meglehetősen gyorsan meghívhatunk. Ezek után a 2-indexű részcsoporthoz tartozásának szükséges és elégséges feltétele ezen faktorcsoporthoz tartozásának a kérdésére redukálódik. (Ha a rend végtelen, azaz eltolások lépnek fel, akkor ezeket elhagyva, tehát a nemszámot nullának tekintve vizsgáljuk tovább.) Általában viszont nem egy, hanem több 2-indexű csoport is létezik, és a kiválasztás valamint a reprezentáció nagyban függ az alaptartomány megadásától is. A feladat tehát adott alaptartományra egy véges algoritmus megadása, amely felsorolja az alaptartományhoz tartozó G' 2-indexű részcsoporthoz tartozókat. Ezen feladat megoldását most nem vesszük célba, csupán reprezentatív példákat adunk. Megemlítjük, a probléma nehézségét illusztrálendő, hogy a feladat algebrai módszerekkel való megoldására még a lényegesen egyszerűbb Fuchs csoportok (irányítástartó transzformációk) esetén sem kerülhetett sor, lásd [2]-t.

Példa 2-indexű részcsoporthoz tartozására (3.ábra)

Most a

$$G' = (+, 1; [2, p, 2q]; \{(1)\}); 2 \leq p, q \in \mathbf{N} \quad (4.1)$$

csoporthoz válasszuk a 3.ábra szerinti 2 indexű

$$G_1 = (+, 2; [p, p, q]; \{(1), (1)\}) \quad (4.2)$$

részcsoporthoz tartozókat.

Szemléletesen tehát a nagyobb csoportban szereplő \mathbf{r} másodrendű forgatást elhagyva, az alaptartományt \mathbf{r} -képpel megduplázva képezzük egy 2-indexű részcsoporthoz tartozókat, ahol a 2-rendű forgáscentrummal szomszédos csúcs G_1 -ekvivalenseinél a szögösszeg megduplázódik, ezért itt q -rendű forgáscentrumot kapunk (3.ábra).

Az (1.3)-as képletbe behelyettesítve G' esetén:

$$T\kappa = \pi\left\{\left(\frac{2}{2} - 2\right) + \left(\frac{2}{p} - 2\right) + \left(\frac{2}{2q} - 2\right) + (-2) + 2(2 - 2)\right\} = \pi\left(-7 + \frac{2}{p} + \frac{1}{q}\right) \quad (4.3)$$

G_1 esetén pedig

$$T\kappa = \pi\left\{2\left(\frac{2}{p} - 2\right) + \left(\frac{2}{q} - 2\right) + 2(-2) + 2(2 - 4)\right\} = \pi\left(-14 + \frac{4}{p} + \frac{2}{q}\right). \quad (4.4)$$

Ez valóban kétszer akkora, mint az előbbi ($\kappa = -1$, valóban a \mathbf{H}^2 síkban kell és lehet realizálni a csoportokat).

Ugyancsak a 3. ábra szellemében [8], de $\mathbf{m}\mathbf{r} =: g(\in \mathbf{H}_3^2)$ eltolástükrözéssel párosítva az \mathbf{m} és $\overline{\mathbf{m}}$ sokszögoldalakat, kapjuk a \mathbf{H}^2 -beli G_2 csoportot.

$$G_2 = (-, 6; [p, p, q]; \{\}) \quad (4.6)$$

Az (1.3) formulába helyettesítve nyerjük - $\chi = l+c-e = 1+4-9 = -4$ és $\chi = 2-\alpha g$ (most $\alpha = 1$) alapján, $-6 = -g$, azaz nemirányítható 6 nemszámú felületre - a kombinatorikus mértéket:

$$T\kappa = \pi\left[2\left(\frac{2}{p} - 2\right) + \left(\frac{2}{q} - 2\right) + (0) + 2(-4)\right] = \pi\left(-14 + \frac{4}{p} + \frac{2}{q}\right). \quad (4.7)$$

Ez összhangban van az eddigiekkel: G_1 és G_2 különböző, de mindegyik 2 indexű részcsoport G' -ben. (3. ábra)

A csoportok I-III típusainak meghatározása után, a következő lépés a csoport elemeihez tartozó \mathbf{R} -irányú eltolási részek meghatározása. Ehhez az ún. Frobenius-féle kongruenciarelációkat kell megoldanunk, tekintettel (2.2)-re, illetve a csoportok lényegében (1.2) alapján adódó definiáló relációira. Majd a megoldások ekvivariancia osztályokba sorolása következhet. Ezt az ekvivarianciát a következő fejezetben részletesebben tárgyaljuk.

Most kicsit kirészletezve bemutatunk egy mintapéldát, amelyből többféle $\Pi \times \mathbf{R}$ -beli tércsoportot származtathatunk (4. ábra).

Tekintsük a $G(u)$ -val jelölt

$$G(u) = (-1, ; [2, u]; \{\}),$$

azaz

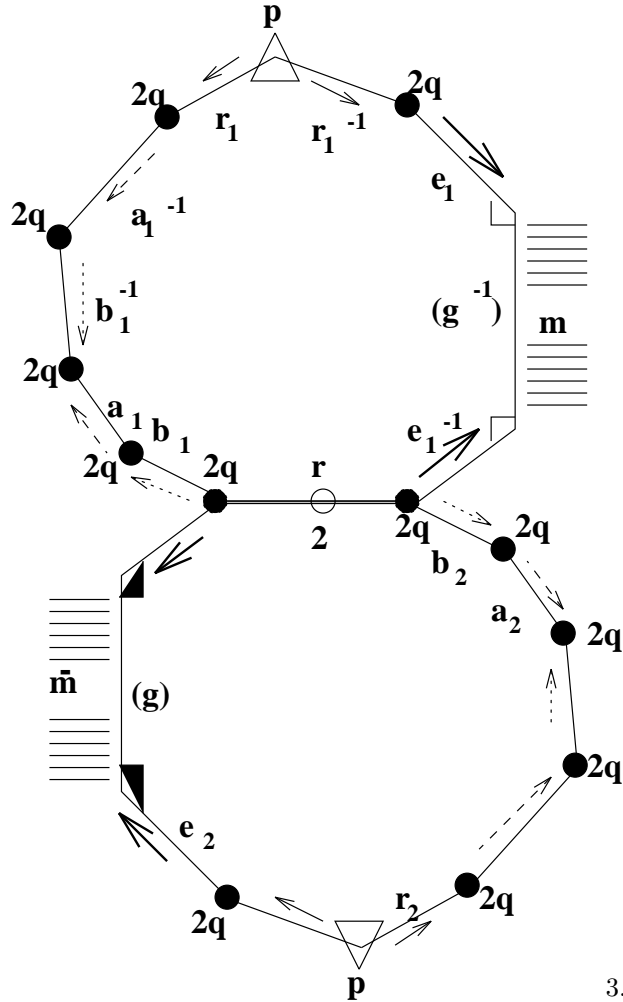
$$G(u) = (g_1, g_2 - g_1^2, (g_1 g_2 g_2)^u) \quad g_1 \in \Pi_2, g_2 \in \Pi_3 \quad (4.8)$$

Π -beli háromszögcsoport szériát [1],[8], amely az u pararaméter változtatásával különböző Π síkokban realizálódik, nevezetesen $u = 1$ esetén szférikus, $u = 2$ esetén euklideszi, $u \geq 3$ esetén pedig hiperbolikus síkcsoportot határoz meg, minthogy

$$T\kappa = \pi\left[\left(\frac{2}{2} - 2\right) + \left(\frac{2}{u} - 2\right) + 2(2 - 1)\right] = \pi\left[-1 + \frac{2}{u}\right] \quad (4.9)$$

Most főleg az $u \geq 3$ hiperbolikus esettel foglalkozunk, a fenti síkcsoportot I-es típusú $\mathbf{H}^2 \times \mathbf{R}$ -beli tércsoporttá bővítve. A fenti prezentálás alapján a $(g_1, \tau_1), (g_2, \tau_2)$ generátorokra a Frobenius féle kongruenciarelációkat felírva

$$2\tau_1 \equiv 0 \quad (\tau_1 + 2\tau_2)u \equiv 0 \quad (\text{mod } 1). \quad (4.10)$$



3.ábra

Prezentáló alaptartományok a

$$\begin{aligned}
 G' &= [m, r, r_1, e_1, a_1, b_1 - m^2, r^2, r_1^p, m e_1 m e_1^{-1}, (r e_1 r_1 a_1 b_1^{-1} a_1^{-1} b_1)^{2q}], \\
 G_1 &= [m, r_1, e_1, a_1, b_1; \bar{m} (= r m r), r_2 (= r r_1 r), e_2 (= r e_1 r), a_2 (= r a_1 r), \\
 & b_2 - m^2, \bar{m}^2, r_1^p, r_2^p, m e_1 m e_1^{-1}, \bar{m} e_2 \bar{m} e_2^{-1}, (e_1 r_1 a_1 b_1^{-1} a_1^{-1} b_1 e_2 r_2 a_2 b_2^{-1} a_2^{-1} b_2)^q], \\
 G_2 &= [r_1, e_1, a_1, b_1; g (= m r), r_2 (= r r_1 r), e_2 (= r e_1 r), a_2 (= r a_1 r), \\
 & b_2 (= r b_1 r) - r_1^p, r_2^p, g^{-1} e_1 g e_2^{-1}, (e_1 r_1 a_1 b_1^{-1} a_1^{-1} b_1 e_2 r_2 a_2 b_2^{-1} a_2^{-1} b_2)^q] \text{ hiperbolikus} \\
 & \text{ síkcsoportokra a Poincaré algoritmus alapján.}
 \end{aligned}$$

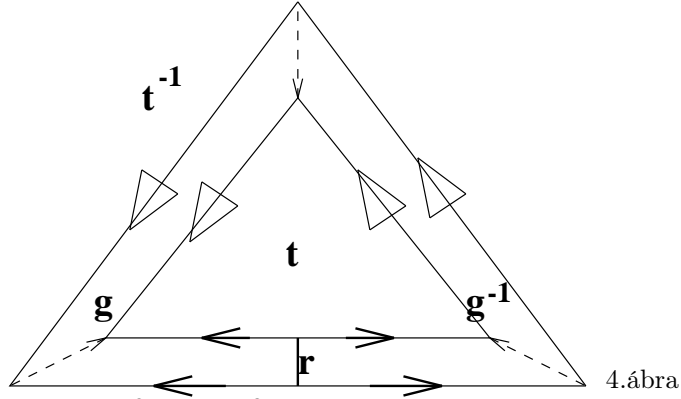
Ezek megoldásai az $u \geq 3$ esetben

$$(\tau_1, \tau_2) \equiv (0, 0), (\tau_1, \tau_2) \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) (\tau_1, \tau_2) \equiv \left(0, \frac{k}{2u}\right), k = 1, 2, \dots, u \quad (4.11)$$

tetszőleges u -ra, illetve

$$(\tau_1, \tau_2) \equiv \left(\frac{1}{2}, 0\right); (\tau_1, \tau_2) \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{k}{2u}\right) k = 1, \dots, u \quad (4.12)$$

megoldások is fellépnek még, ha u páros.



4.ábra

$$G(3) = (g_1, g_2 - g_1^2, (g_1 g_2 g_2)^3) \quad r := (g_1, 0); g := (g_2, 0); t := (e, \tau)$$

$$\Gamma = (r, g, t - r^2, (r g g)^3, r t r t^{-1}, g t g^{-1} t^{-1})$$

Az $u = 1$, $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$ térben fellépő esetek [6]-ban **7, 2.I** alatt megtalálhatók. Az $u = 2$, $\mathbf{E}^2 \times \mathbf{R} = \mathbf{E}^3$ esetén fellépő euklideszi tércsoportok

$(0, 0) \sim \mathbf{Pba2}(No.32)$; $(0, \frac{1}{4}) \sim \mathbf{Fdd2}(43)$; $(0, \frac{1}{2}) \sim \mathbf{Pnn2}(34)$; $(\frac{1}{2}, 0) \sim \mathbf{Pca2}_1(29)$; $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) \sim \mathbf{Fdd2}(43)$; $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \sim \mathbf{Pna2}_1(33)$ a nemzetközi táblázatok szerint. Az $\mathbf{Fdd2}$ tércsoporthoz vezető fenti esetek ekviviánsnak $\text{Isom}(\mathbf{E}^2 \times \mathbf{R})$ szerint.

5. Ekvivariancia, algebrai és geometriai izomorfizmus

A számításba jövő összes csoportosztály meghatározása után a fő kérdés a csoportok ekvivalenciájának meghatározása. Az ekvivariancia fogalma adja az osztályozás alapját, amely geometriai izomorfizmust jelent, megkülönböztetve a csoportok algebrai izomorfizmusától. Az ekvivariancia fogalmát lényegében Macbeath vezette be 2 dimenziós geometriákra.

Most röviden tárgyaljuk a Π alapsíkbeli síkcsoportok ekvivarianciáját, fölelevenítve a szükséges fogalmakat.

A Π sík Γ_1 és Γ_2 csoportjait ekviviviánsnak nevezzük (geometriailag izomorfoknak), a Π sík $\text{Hom}(\Pi)$ homeomorfizmus csoportja szerint, ha

$$\exists h(\in \text{Hom}(\Pi)) : X \mapsto X', (X, X' \in \Pi) \text{ és } \varphi : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2 \quad (5.1)$$

csoportizomorfizmus, hogy bármely $X \in \Pi$ és $g \in \Gamma_1$ esetén

$$Y = Xg \Leftrightarrow Yh = Xh(g\varphi) \quad (5.2)$$

Ebből

$$Xgh = Xh(g\varphi) \Rightarrow g\varphi = h^{-1}gh. \quad (5.3)$$

Tehát, a Γ_1, Γ_2 csoportok ekviviánsak, ha konjugáltak $Hom(\Pi)$ -ben. Felidézzük továbbá a szignatúrák ekvivarianciájának kritériumáról szóló tételket [9], ahol most az i -edik peremkomponens diéderrendjeinek halmazát (C_i) jelöli

Tétel 5.1(Macbeath) Ha a

$$\Gamma = (+; g; [m_1, \dots, m_r]; \{(C_1), \dots, (C_k)\})$$

és a

$$\Gamma' = (+; g'; [m'_1, \dots, m'_r]; \{(C'_1), \dots, (C'_k)\}) \quad (5.5)$$

csoportok ekviviánsak, akkor $r = r', k = k'$, a Γ -ban szereplő $\{m_i\}$ halmaz az $\{m'_i\}$ halmaz egy permutációja, és létezik a peremkomponensek olyan $\Phi_{\{1,2,\dots,k\}}$ permutációja, hogy minden i -re C'_i direkt ekvivalens $C_{\Phi(i)}$ -vel (tehát az i -edik peremkomponensben szereplő $\{n_{i1}, \dots, n_{is_i}\}$ számsor minden elemére $n_{ij} = n_{\Phi(i)j+l}$ teljesül minden $1 \leq j \leq s_i$ esetén valamely l -re $(\text{mod } s_i)$), vagy minden i -re C'_i inverz ekvivalens $C_{\Phi(i)}$ -vel (tehát a peremkomponens minden elemére $n_{ij} = n_{\Phi(i)j-h}$ teljesül $(\text{mod } s_i)$). \square

Tétel 5.2(Macbeath) Ha a

$$\Gamma = (-; g; [m_1, \dots, m_r]; \{(C_1), \dots, (C_k)\})$$

és a

$$\Gamma' = (-; g'; [m'_1, \dots, m'_r]; \{(C'_1), \dots, (C'_k)\}) \quad (5.6)$$

csoportok ekviviánsak, akkor $r = r', k = k'$, a Γ -ban szereplő $\{m_i\}$ halmaz az $\{m'_i\}$ halmaz egy permutációja, és létezik a peremkomponensek olyan $\Phi_{\{1,2,\dots,k\}}$ permutációja, hogy minden i -re C'_i direkt vagy inverz ekvivalens $C_{\Phi(i)}$ -vel. \square

Mint már említettük, Macbeath bebizonyította az alábbi, a \mathbf{H}^2 -beli sikcsoportokra vonatkozó fontos tételt:

Tétel 5.3(Macbeath) Ha a Γ és Γ' csoportok izomorfak, akkor ekviviánsak, azaz létezik a síknak olyan h homeomorfizmusa a síknak, hogy $\varphi(\Gamma) = h^{-1}\Gamma h$ teljesül. \square

A $\Pi \times \mathbf{R}$ térben az ekvivariancia két lehetséges fogalmát tárgyaljuk kiemelve a különbségeket, és a fő nehézségeket.

5.1. A „hasznalásági” ekvivariancia

Az $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$ térben használt definíció analógiájára természetesen vezethetjük be általában $\Pi \times \mathbf{R}$ -ben az ekvivariancia következő fogalmát:

Definíció 5.1 A $\Pi \times \mathbf{R}$ tér Γ_1 és Γ_2 tércsoportja ekviviáns \Leftrightarrow

$$\exists H := h \times s : h \in \overline{Hom}(\Pi), s \in Sim(\mathbf{R}), : \Gamma_2 = H^{-1}\Gamma_1 H, \quad (5.6)$$

ahol $\overline{Hom}(\Pi)$ jelöli a Π sik homeomorfizmus csoportjának azon legszűkebb részcsoportját amelyben a Π -beli ekviviáns csoportok már konjugáltak. \mathbf{S}^2 esetében ez $Isom(\mathbf{S}^2)$ lesz,

\mathbf{E}^2 -ben mint jól tudjuk az affinitások csoportja lesz, \mathbf{H}^2 -ben pedig bonyolultsága miatt itt most nem adunk meg ilyen szűkebb csoportot. A fenti definíció természetesen adódik, ha figyelembe vesszük, hogy a $\mathbf{\Pi}$ -beli ekvivariáns csoportok $\overline{Hom}(\mathbf{\Pi})$ -ben konjugáltak, illetve az \mathbf{R} -irányú rács hasonlóság erejéig adott.

Látható továbbá az a fontos tény, hogy ha Γ_1 és Γ_2 ekvivariáns csoportok, akkor $p(\Gamma_1)$ és $p(\Gamma_2)$ ekvivarianciája természetesen adódik, ugyanis:

$$\Gamma_2/L_{\Gamma_2} = (H^{-1}\Gamma_1H)/L_{\Gamma_2} = H^{-1}(\Gamma_1/L_{\Gamma_1})H. \quad (5.7)$$

5.2. Ekvivariancia homeomorfizmussal

A másik általánosabb fogalom a faktorterek topológiai tulajdonságait jellemzi, mint látni fogjuk.

Definíció 5.2 A $\mathbf{\Pi} \times \mathbf{R}$ tér Γ_1 és Γ_2 tércsoportja ekvivariáns \Leftrightarrow

$$\exists H \in Hom(\mathbf{\Pi} \times \mathbf{R}), : \Gamma_2 = H^{-1}\Gamma_1H \quad (5.8)$$

Egy ilyen H homeomorfizmus tehát az x pont Γ_1 -pályáját a $H(x)$ pont Γ_2 -pályájára képezi, így homeomorfizmust indukál a T/Γ_1 , T/Γ_2 faktorterek között, $T = \mathbf{\Pi} \times \mathbf{R}$. Az ekvivariancia tehát topológiai ekvivalenciát indukál, és természetesen algebrai izomorfizmust, de a megfordítás nem mindig igaz, mint látni fogjuk.

\mathbf{E}^n -ben ma már klasszikusnak számító tétel mondja ki, hogy két tércsoport akkor és csak akkor izomorf, ha affin konjugáltak. Tehát itt minden izomorfizmusnak létezik geometriai realizációja. Ugyanezt bizonyította Macbeath a hiperbolikus síkban. Könnyen láthatjuk viszont, hogy ugyanez nem megy még az állandó görbületű \mathbf{S}^2 -ben sem, ugyanis pl. $C_2 \cong D_1$ (ahol C_2 egy másodrendű forgatás által generált csoport, D_1 egy gömbi főkörre való tükrözés által generált szintén két elemű csoport) de nyilván nem létezik geometriai realizáció, ugyanis: *egy geometriai izomorfizmus megőrzi a transzformációk irányítástartását (tehát irányítástartó transzformáció képe szintén irányítástartó).*

Fontos kiemelnünk továbbá, hogy itt sajnos nem igaz, hogy ekvivariáns csoportok alapsíkbeli vetülete is ekvivariáns csoportot ad. Példaként említhetjük az $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$ -beli **7qo.I.3**($\frac{k}{2q}$) és **5qo.I.4**($\frac{1}{2}, \frac{k}{q}$) fixpont mentes csoportosztályokat, amelyek diffeomorf (így homeomorf) ekvivariánsak [6],[7], de láthatóan különböző szignatúrához tartoznak. Láthatjuk azt is, hogy hasonlóság nem biztosíthatja az ekvivarianciát. Tehát az (5.1) szerinti osztályozás $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$ -ben valóban bővebb volt mint a valódi homeomorfizmus ekvivariancia osztályozás. Ezzel ellentétben $\mathbf{E}^2 \times \mathbf{R}$ -ben az (5.1)-ből adódó releváns affinitás osztályozás ugyanazt kell adja mint az általánosabb homeomorfizmus ekvivariancia, ugyanis minden $\mathbf{E}^2 \times \mathbf{R}$ -beli tércsoport egyben \mathbf{E}^3 -beli tércsoport is lesz.

Visszatérve a tércsoport(osztályok) meghatározásának stratégiájához, a Frobenius kongruenciák megoldása után kapott csoportok halmazának ekvivariancia osztályokba sorolása a feladat. Ha az 5.1 szerinti definíciót tekintjük az osztályozás alapjául, akkor ezt az $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$ -ben alkalmazottakhoz hasonlóan végezhetjük, nem nehéz elhinni, hogy ugyanazok a típusú transzformációk jönnek számításba (amelyek tehát a csoportok ekvivarianciáját biztosítják). Ezek leírása megtalálható [5]-ben, ezt a továbbiakban nem kívánjuk részletezni.

Fontos viszont megemlíteni, hogy az általános homeomorfizmus ekvivariancia $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$ -hez

hasonlóan ($\mathbf{E}^2 \times \mathbf{R}$ -el ellentétben) kevesebb tércsoportosztályhoz vezethet, és mint említettük itt nem igaz, hogy ekviviáriáns csoportok vetülete is ekviviáriáns (tehát ugyanahhoz a szignatúrához tartozik izomorfia erejéig). Vagyis különböző szignatúrához tartozó $\mathbf{H}^2 \times \mathbf{R}$ -beli megoldások lehetnek ekviviáriánsak, ami meglehetősen bonyolulttá teszi a problémát.

Különösen fontos ez a térformákat adó fixpontmentes csoportoknál, ahol csak a transzformációk irányítástartásának az ekviviárianciával szembeni invarianciája lesz a támpont. Mégis az alábbihoz hasonló eredmények, és finom meggondolások segítségével a $\mathbf{H}^2 \times \mathbf{R}$ -beli térformák egy lehetséges osztályozása reménytelinek ígérkezik.

Állítás 5.3 Ha a $\mathbf{H}^2 \times \mathbf{R}$ -beli Γ_1, Γ_2 első típusbeli tércsoportok a 4.1 Tétel szerint, és homeomorf ekviviáriánsak, akkor a \mathbf{H}^2 -beli vetületük is ekviviáriáns.

Bizonyítás Mivel most az $\bar{\Gamma}_{\mathbf{R}}$ tükrözés nem eleme a tércsoportnak, és az \mathbf{R} -irányú eltolások kommutálnak minden \mathbf{H}^2 -beli transzformációval, képezhetjük a következő direkt szorzat felbontást:

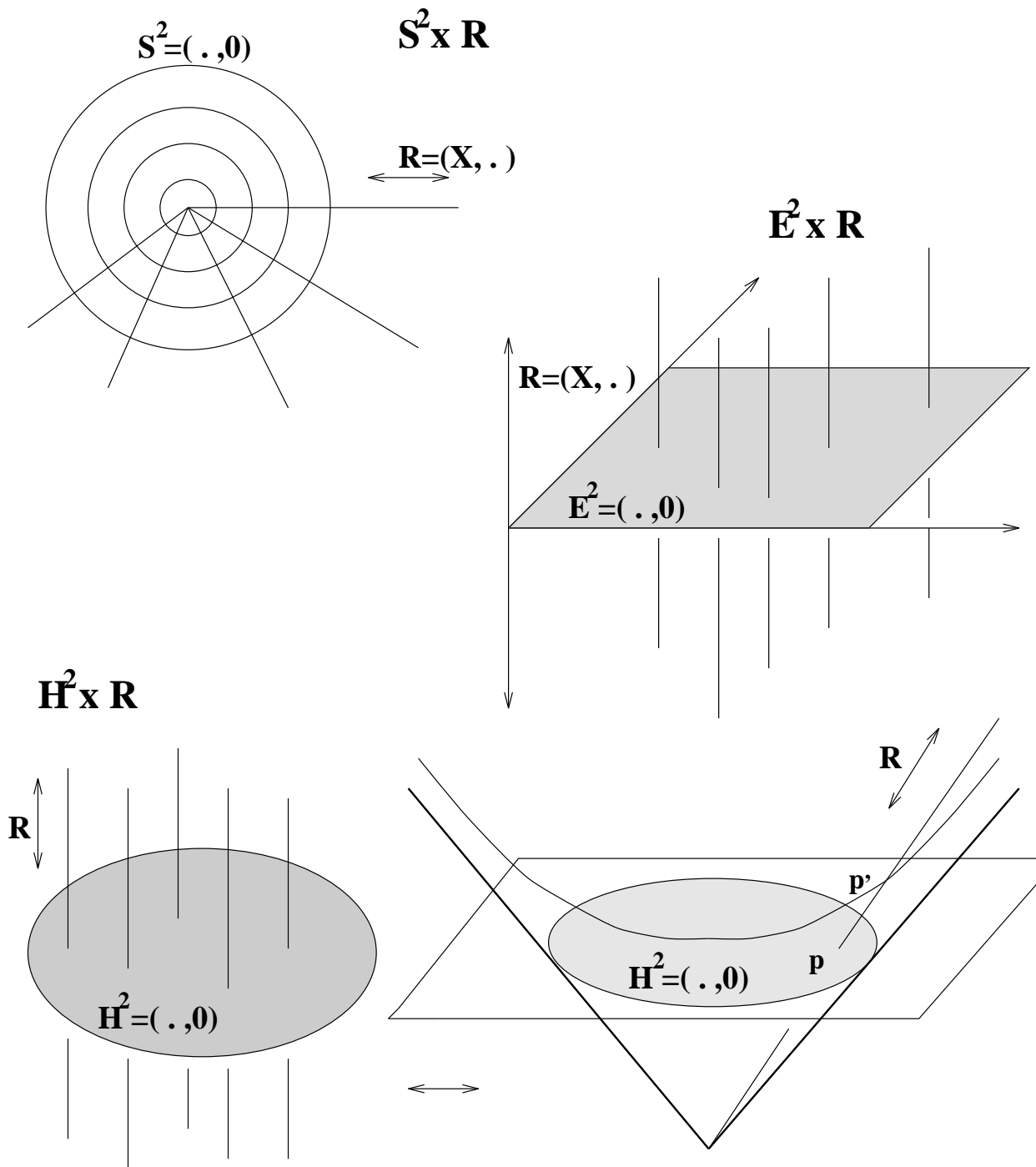
$$\Gamma_1 \cong (\Gamma_1/L_{\Gamma_1}^{\mathbf{R}}) \times L_{\Gamma_1}^{\mathbf{R}}, \quad \Gamma_2 \cong (\Gamma_2/L_{\Gamma_2}^{\mathbf{R}}) \times L_{\Gamma_2}^{\mathbf{R}}, \quad (5.4)$$

és $\varphi(\Gamma_1) = \Gamma_2$ miatt $\varphi(\Gamma_1/L_{\Gamma_1}^{\mathbf{R}}) \cong \Gamma_2/L_{\Gamma_2}^{\mathbf{R}}$ következik, hiszen bármely két \mathbf{R} -irányú rács hasonló. Ezek után a faktorcsoporthok elemeinek \mathbf{R} -beli eltolási részeitől eltekintve izomorf \mathbf{H}^2 -beli csoportokat kapunk, melyek Macbeath tétele (5.3 Tétel) szerint ekviviáriánsak lesznek. ■

Hivatkozások

- [1] Bölcskei, A.; Molnár, E.: Graphische Realisierung der homogenen Dreieckpflasterungen in \mathbf{S}^2 , \mathbf{E}^2 und \mathbf{H}^2 . *GEOMETRIE-TAGUNG „107 Jahre Drehfluchtprinzip“* Vorau, 1-6.Juni.1997
- [2] Bundgaard, S.; Nielsen, J.: On the normal subgroup with finite index in F-groups, *Mat. Tidsskr.,B* (1951), 56-58.
- [3] Coxeter, H.S.M.; Moser, W.O.J.: *Generators and relations for discrete groups*, fourth ed. Springer-Verlag (1980)
- [4] Farkas, J.Z.: Az $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$ és $\mathbf{H}^2 \times \mathbf{R}$ terek izometriáról. TDK dolgozat BME (1998)
- [5] Farkas, J.Z.: Az $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$ tércsoportjainak az osztályozása. TDK dolgozat BME (1999)
- [6] Farkas, J.Z.: The classification of $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$ space groups. *Beiträge zur Algebra und Geometrie (Contributions to Algebra and Geometry)* (to appear)
- [7] Farkas, J.Z.; Molnár, E.: Similarity and diffeomorphism classification of $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$ manifolds (manuscript to Proceedings of Colloquium on Differential Geometry, Debrecen, 25-30.07.2000)
- [8] Lucic, Z.; Molnár, E.: Combinatorial classification of fundamental domains of finite area for planar discontinuous isometry groups. *Arch. Math.* **Vol.54**, (1990), 511-520.
- [9] Macbeath A.M.: The classification of non-euclidean crystallographic plane groups. *Canadian Journal Math.* (1967), 1193-1205.
- [10] Molnár, E.: The projective interpretation of the eight 3-dimensional homogeneous geometries. *Beiträge zur Algebra und Geometrie (Contributions to Algebra and Geometry)*, **Vol.38** (1997), No.2. 261-288.

- [11] Scott, P.: The geometries of 3-manifolds. *Bull. London Math. Soc.* **15** (1983), 401-487.
- [12] Thurston, W. P.: Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry. *Bull. Amer. Math. Soc.* **6** (1982), 357-381.
- [13] Thurston, W.P.(ed. by Levy. S): *Three dimensional geometry and topology*, **Vol.1** Princeton University Press (1997) (Ch.3,8,4.7)



2.ábra $A \Pi \times \mathbf{R}$ terek szimbolikus interpretációi [4],[7],[10] alapján